СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ГЕЛЛЕРСТЕДА ДЛЯ ТРЕХМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С СИНГУЛЯРНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

А.М.Шокиров

I. Постановка задачи

Пусть $\Omega=\{(x,y,z):(x,y)\in\Delta,\ z=(0,c)\}$, где $\Delta-$ конечная односвязная область плоскости xOy, ограниченная при $y\geq 0$ дугой $\bar{\sigma}_0=\{(x,y):x^2+y^2=1,\ y\geq 0\}$ и при $y\leq 0$ отрезками $\overline{AB}=\{(x,y):y=-x-1,\ x\in[-1,-1/2]\}$, $\overline{OB}=\{(x,y):y=x,\ x\in[-1/2,0]\}$, $\overline{OC}=\{(x,y):y=-x,\ x\in[0,1/2]\}$, $\overline{CD}=\{(x,y):y=x-1,x\in[1/2,1]\}$, $O=O(0,0)$, $A=A(-1,0)$, $B=B(-1/2,-1/2)$, $C=C(1/2,-1/2)$, $D=D(1,0)$.

Рассмотрим уравнения

$$U_{xx}+\operatorname{sgn}y\cdot U_{yy}+U_{zz}+\frac{2\gamma}{z}U_z=0\ , \qquad (1)$$

в области Ω, где $U=U(x,y,z)$, а $\gamma\in R$ причем $\gamma\in(0,1/2)$.

Введем обозначения: $\Delta_0=\Delta\cap\{y>0\}$, $\Delta_1=\Delta\cap\{(x>0)\cup(y<0)\}$, $\Delta_2=\Delta\cap\{(x<0)\cup(y<0)\}$, $\Omega_j=\Delta_j\times(0,c),\ j=\overline{0,2}$, $S_0=\{(x,y,z):\sigma_0\times(0,c)\}$, $S_1=\{(x,y,z):OB\times(0,c)\}$, $S_2=\{(x,y,z):OC\times(0,c)\}$, $S_3=\{(x,y,z):(x,y)\in\Delta,z=0\}$, $S_4=\{(x,y,z):(x,y)\in\Delta,z=c\}$, $\Omega^{\pm}=\Omega\cap\{\pm x>0,z\in(0,c)\}$, $\Delta^{\pm}=\Delta\cap\{\pm x>0\}$.

В области Ω уравнения (1) принадлежит смешанному типу, т.е. в области Ω_0 –эллиптическому типу, а в областях Ω_1 и Ω_2 – гиперболическому типу, причем $z=0$ является плоскости сингулярности уравнения, а при переходе через прямоугольника $\bar{\Omega}\cap\{y=0\}$ уравнения меняет свой тип.

Для уравнения (1) в области Ω исследуем следующую задачу:

Задача G_λ. Найти функцию $U(x,y,z)$, удовлетворяющую в области Ω уравнению (1) и следующим условиям:

$$U(x,y,z)\in C(\bar{\Omega})\cap C^1(\Omega)\cap C^{2,2,2}_{x,y,z}(\Omega_0\cup\Omega_1\cup\Omega_2); \qquad (2)$$

$$U(x,y,z)\big|_{\bar{S}_1}=0\,,\ U(x,y,z)\big|_{\bar{S}_2}=0\,; \qquad (3)$$

$U(x,y,z)\big|_{\bar{S}_3}=0$, $U(x,y,z)\big|_{\bar{S}_4}=0$,

(4)

где $F(x,y,z)$ – заданная функция.

2. Построения нетривиальных решений задачи {(1)-(4)}

Разделив переменные по формуле $U(x,y,z)=u(x,y)Z(z)$, из уравнения (1) и краевых условий (3) и (4) получим следующие задачи на собственные значения:

$$u(x,y)\in C(\bar{\Delta})\cap C^1(\Delta)\cap C^{2,2}_{x,y}(\Delta_0\cup\Delta_1\cup\Delta_2); \quad (5)$$

$$u_{xx}+(\operatorname{sgn} y)u_{yy}-\lambda u=0,\ \ (x,y)\in\Delta, \quad (6)$$

$$u(x,y)\big|_{\overline{OB}}=0,\ -1/2\le x\le 0;\ \ u(x,y)\big|_{\overline{OC}}=0,\ 0\le x\le 1/2; \quad (7)$$

$$Z''(z)+\frac{2\gamma}{z}Z'(z)+\lambda Z(z)=0,\ 0<z<c, \quad (8)$$

$$Z(0)=0,\ \ Z(c)=0. \quad (9)$$

Задача {(8),(9)} имеет нетривиальные решения вида [1]

$$Z_m(z)=z^{1/2-\gamma}J_{1/2-\gamma}(\sigma_m z/c),\ m\in N, \quad (10)$$

где $J_l(z)$ – функция Бесселя порядка l первого рода [2], а σ_m – m-ый положительный корень уравнения $J_{1/2-\gamma}\left(\sqrt{\lambda}c\right)=0$, $\lambda_m=(\sigma_m/c)^2$, $m\in N$.

Согласно теории бесселевых функций [2], система собственных функций (10) ортогональна и полна в пространстве $L_2(0,c)$ с весом $z^{2\gamma}$.

Теперь рассмотрим задачу {(6),(7)} при $\lambda=\lambda_m$ в области Δ. Будем искать решение $u(x,y)$ задачи {(6),(7)} в следующем виде:

$$u(x,y)=\begin{cases} u_1(x,y)+u_2(x,y),\ (x,y)\in\bar{\Delta}^+, \\ u_1(-x,y)-u_2(-x,y),\ (x,y)\in\bar{\Delta}^-, \end{cases} \quad (11)$$

где функции $u_1(x,y)$ и $u_2(x,y)$ положим соответственно равными:

$$u_1(x,y)=\frac{1}{2}\big(u(x,y)+u(-x,y)\big),\ \ (x,y)\in\bar{\Delta}^+, \quad (12)$$

$$u_2(x,y)=\frac{1}{2}\big(u(x,y)-u(-x,y)\big),\ \ (x,y)\in\bar{\Delta}^+. \quad (13)$$

Очевидно, если $(x,y)\in\bar{\Delta}^+$, то $(-x,y)\in\bar{\Delta}^-$.

Рассмотрим далее краевую задачу, которая может быть сформулирована относительно вспомогательной функции $u_2(x,y)$:

$$u_2(x,y)\in C\left(\bar{\Delta}^+\right)\cap C^1\left(\Delta^+\right)\cap C^{2,2,2}_{x,y,z}\left(\Delta^+\setminus\{y=0\}\right), \quad (14)$$

$$u_{2xx}+\operatorname{sgn} y\cdot u_{2yy}-\lambda_m u_2=0,\ (x,y)\in\Delta^+, \quad (15)$$

$$u_2(0,y)=0,\ y\in[0,1], \quad (16)$$

$$u_2(x,y)\big|_{\overline{OC}}=u_2(x,-x)=0,\ x\in[0,1/2]. \quad (17)$$

Решим эту задачу. Сначала рассмотрим эту задачу в области Δ_1 при $\lambda=\lambda_m$, т.е. рассмотрим следующую задачу:

$$u_{2xx}-u_{2yy}-\lambda_m u_2=0,\ \ (x,y)\in\Delta_1, \quad (18)$$

$$u_2(x,-x)=0,\ \ x\in[0,1/2]. \quad (19)$$

Решение этой задачи ищем в виде

$$u(x,y)=X(\xi)Y(\eta),\ \text{где}\ \xi=\sqrt{x^2-y^2},\ \eta=x^2/\xi^2. \quad (20)$$

Тогда относительно функций $X(\xi)$ и $Y(\eta)$ получим следующие условия $X(0)=0$, $\left|\lim\limits_{\eta\to+\infty}Y(\eta)\right|<+\infty$ и уравнения

$$\xi^2X''(\xi)+\xi X'(\xi)-\left[\lambda_m\xi^2+\mu\right]X(\xi)=0,\ \xi>0; \quad (21)$$

$$\eta(1-\eta)Y''(\eta)+(1/2-\eta)Y'(\eta)+\frac{1}{4}\mu Y(\eta)=0,\ \eta>1, \quad (22)$$

где $\mu\in R$ – константа разделения.

Решения уравнения (21), удовлетворяющие условию $X(0)=0$, существуют при $\mu>0$ и они (с точностью до постоянного множителя) имеют вид [2]

$$X(\xi)=I_\omega(\sigma_m\xi/c),\ m\in N, \quad (23)$$

где $\omega=\sqrt{\mu}$, а $I_l(x)$ – функция Бесселя мнимого аргумента порядка l [2].

(22) является гипергеометрическим уравнением Гаусса [3]. Его общее решение определяется формулой [3]

$$Y(\eta)=c_1\eta^{-\omega/2}F(\omega/2,1/2+\omega/2,1+\omega;1/\eta)+$$
$$c_2\eta^{\omega/2}F(-\omega/2,1/2-\omega/2,1-\omega;1/\eta), \quad (24)$$

где c_1 и c_2 -произвольные постоянные.

Так как $\omega>0$, то из (24) следует, что для того чтобы получить ограниченную при $\eta\to+\infty$ функцию, в формуле надо положить $c_2=0$, в итоге чего, получим

$$Y(\eta)=c_1\eta^{-\omega/2}F(\omega/2,1/2+\omega/2,1+\omega;1/\eta).$$

Принимая известную формулу [3]

$$F(a-1/2,a,2a;\eta)=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1-\eta}\right)^{1-2a},$$

последнюю функцию можно переписать в виде

$$Y(\eta)=c_1 2^{\omega}\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^{\omega/2}. \qquad (25)$$

Следовательно, непрерывные и нетривиальные в $\bar{\Delta}_1$ решения задачи {(18),(19)}, согласно (20), (23) и (25), определяются равенствами

$$u_{2m}^{-}(x,y)=c_1 2^{\omega}\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^{\omega/2} I_{\omega}\left(\sigma_m\sqrt{x^2-y^2}/c\right),\ c_1\neq 0,\ m\in N. \qquad (26)$$

Отсюда, находим

$$\begin{cases}\tau_m^{-}(x)=\lim\limits_{y\to -0}u_{2m}^{-}(x,y)=c_1 2^{\omega}I_{\omega}(\sigma_m x/c),\ x\in[0,1];\\ \nu_m^{-}(x)=\lim\limits_{y\to -0}\dfrac{\partial}{\partial y}u_{2m}^{-}(x,y)=c_1\omega 2^{\omega}x^{-1}I_{\omega}(\sigma_m x/c),\ x\in(0,1).\end{cases} \qquad (27)$$

Теперь рассмотрим задачу {(14)-(17)} при $\lambda=\lambda_m$ в области $\Delta_0\cap\{x>0\}$, т.е. рассмотрим следующую задачу:

$$u_{2xx}+u_{2yy}-\lambda_m u_2=0,\ \ (x,y)\in\Delta_0\cap\{x>0\}, \qquad (28)$$

$$u_2(0,y)=0,\ \ y\in[0,1]. \qquad (29)$$

Разделив переменные по формуле

$$u_2(x,y)=Q(\rho)S(\varphi), \qquad (30)$$

где $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$, $\varphi=arctg(y/x)$, из уравнения (28) и условий $u_2\in C(\bar{\Delta}_0\cap\{x\geq 0\})$, (29), получим следующие задачи:

$$\rho^2 Q''(\rho)+\rho Q'(\rho)-\left[(\sigma_m\rho/c)^2+\tilde{\mu}\right]Q(\rho)=0,\ \rho\in(0,1), \qquad (31)$$

$$|Q(0)|<+\infty; \qquad (32)$$

$$S''(\varphi)+\tilde{\mu}S(\varphi)=0,\ \varphi\in(0,\pi/2), \qquad (33)$$

$$S(\pi/2)=0, \qquad (34)$$

где $\tilde{\mu}\in R$- константа разделения.

Сначала исследуем задачи {(31),(32)}. Общее решение уравнения (31) определяется в виде [2]

$$Q_m(\rho)=c_3 I_{\tilde{\omega}}(\sigma_m\rho/c)+c_4 K_{\tilde{\omega}}(\sigma_m\rho/c),\ \rho\in[0,1], \qquad (35)$$

здесь $\tilde{\omega}=\sqrt{\tilde{\mu}}$, c_3 и c_4- произвольные постоянные, $K_l(x)$–функция Макдональда порядка l [2].

Из (35) следует, что решения уравнения (31), удовлетворяющие условию (32), существуют при $\tilde{\mu}\geq 0$ и они определяются равенствами

$$Q_m(\rho)=c_3 I_{\tilde{\omega}}(\sigma_m \rho/c),\ \tilde{\omega}\geq 0,\ m\in N. \qquad (36)$$

Теперь, исследуем задачу {(33),(34)}. Общее решение уравнения (33) имеет вид

$$S(\varphi)=c_5\cos(\tilde{\omega}\varphi)+c_6\sin(\tilde{\omega}\varphi), \qquad (37)$$

где c_5 и c_6 - произвольные постоянные.

Удовлетворяя функцию (37) условию (34), получим $c_6=-ctg(\tilde{\omega}\pi/2)c_5$. Подставляя в (37) $c_6=-ctg(\tilde{\omega}\pi/2)c_5$ и полагая $c_5=1$ (это не нарушает общности), имеем

$$S(\varphi)=\cos(\tilde{\omega}\varphi)-ctg(\tilde{\omega}\pi/2)\sin(\tilde{\omega}\varphi). \qquad (38)$$

На основании (30), (36) и (38), заключаем, что непрерывные и нетривиальные в $\overline{\Delta}_0\cap\{x\geq 0\}$ решения задачи {(28),(29)}, имеют вид

$$u_{2m}^{+}(x,y)=c_3 I_{\tilde{\omega}}(\sigma_m\rho/c)\left[\cos(\tilde{\omega}\varphi)-ctg(\tilde{\omega}\pi/2)\sin(\tilde{\omega}\varphi)\right], \qquad c_3\neq 0,\ m\in N, \qquad (39)$$

где $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$, $\varphi=arctg(y/x)$.

Отсюда, непосредственным вычислением, находим

$$\begin{cases}\tau_m^{+}(x)=\lim\limits_{y\to+0}u_{2m}^{+}(x,y)=c_3 I_{\tilde{\omega}}(\sigma_m x/c),\ x\in[0,1];\\ \nu_m^{+}(x)=\lim\limits_{y\to+0}\dfrac{\partial}{\partial y}u_{2m}^{+}(x,y)=-c_3\tilde{\omega}ctg(\tilde{\omega}\pi/2)x^{-1}I_{\tilde{\omega}}(\sigma_m x/c),\ x\in(0,1).\end{cases} \qquad (40)$$

Далее, на основании условий (14), следуют следующие равенства:

$$\begin{cases}\tau_m^{-}(x)=\tau_m^{+}(x),\ x\in[0,1],\\ \nu_m^{-}(x)=\nu_m^{+}(x),\ x\in(0,1).\end{cases} \qquad (41)$$

Подставляя (27) и (40) в (41) и полагая $\omega=\tilde{\omega}$, имеем однородную систему уравнений относительно c_1 и c_3:

$$\begin{cases}2^{\omega}c_1+ctg\dfrac{\omega\pi}{2}c_3=0,\\ 2^{\omega}c_1-c_3=0.\end{cases} \qquad (42)$$

Из система (42), найдем $ctg\dfrac{\omega\pi}{2}=-1$. Выписывая решения этого уравнения и принимая во внимание условие $\omega>0$, находим

$$\omega_n=2n-1/2,\ n\in N. \qquad (43)$$

На основании (43), числа $\mu_n=\omega_n^2, n\in N$ является собственными значениями задач {(22), $\left|\lim\limits_{\eta\to+\infty}Y(\eta)\right|<+\infty$} и {(33),(34)}.

Отметим, что при $\omega=\omega_n$ функция $S(\varphi)$, определеннее равенством (38), напишется в виде

$$S_n(\varphi)=\sqrt{2}\sin\left[\frac{\pi}{4}+\left(2n-\frac{1}{2}\right)\varphi\right]. \qquad (44)$$

В работе [4], доказано, что система собственных функций (44) образует базис в пространстве $L_2(0,\pi/2)$.

Учитывая доказанных выше и равенства (26), (39), $\omega=\tilde{\omega}=\omega_n$, заключаем, что функции

$$u_{2nm}(x,y)=\begin{cases} c_{3nm}\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\omega_n\varphi\right)I_{\omega_n}(\sigma_m\rho/c),\ (x,y)\in\bar{\Delta}_0\cap\{x\ge0\}, \\ c_{3nm}\left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)^{\omega_n/2} I_{\omega_n}(\sigma_m\xi/c),\ (x,y)\in\bar{\Delta}_1, \end{cases} \qquad (45)$$

где $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$, $\varphi=arctg(y/x)$, $\xi=\sqrt{x^2-y^2}$, $\omega_n=2n-\dfrac{1}{2}$, являются непрерывными и нетривиальными в Δ^+ решениями задачи {(14)-(17)}.

Тогда, функции

$$U_{2nm}(x,y,z)=u_{2nm}(x,y)Z_m(z),\ n,m\in N, \qquad (46)$$

где $Z_m(z)$ и $u_{2nm}(x,y)$– функции, определяемые равенствами (10) и (45), являются непрерывными и нетривиальными в Ω^+ решениями уравнения (1), удовлетворяющие условиям $U(x,y,z)\big|_{\bar{S}_2\cup(\bar{S}_3\cap\{x\ge0\})\cup(\bar{S}_4\cap\{x\ge0\})}=0$ и $U(0,y,z)=0$.

Теперь рассмотрим функцию (12). Исходя из формулы (12), несложно получить следующую краевую задачу, которую достаточно рассмотреть на интервале $0<x<1$ в силу симметрии функции $u=u(x,y)$ относительно $x=0$:

$$u_1(x,y)\in C\left(\bar{\Delta}^+\right)\cap C^1\left(\Delta^+\right)\cap C^{2,2,2}_{x,y,z}\left(\Delta^+\setminus\{y=0\}\right), \qquad (47)$$

$u_{1xx} + \operatorname{sgn} y \cdot u_{1yy} - \lambda_m u_1 = 0,\ (x,y) \in \Delta^+,$ (48)

$u_{1x}(x,y)\big|_{x=0} = 0,\ y \in (0,1),$ (49)

$u_1(x,y)\big|_{\overline{OC}} = u_1(x,-x) = 0,\ x \in [0,1/2].$ (50)

Аналогично задачам {(14)-(17)}, найдем непрерывные и нетривиальные в Δ^+ решения задачи {(47)-(50)} в виде

$$u_{1nm}(x,y) = \begin{cases} \tilde{c}_3 \sqrt{2} \cos\left(\dfrac{\pi}{4} - \theta_n \varphi\right) I_{\theta_n}(\sigma_m \rho / c),\ (x,y) \in \overline{\Delta}_0 \cap \{x \ge 0\}, \\ \tilde{c}_3 \left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)^{\theta_n/2} I_{\theta_n}(\sigma_m \xi / c),\ (x,y) \in \overline{\Delta}_1, \end{cases} \qquad (51)$$

где $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = arctg(y/x)$, $\xi = \sqrt{x^2 - y^2}$, $\theta_n = 2n - \dfrac{3}{2}, n \in N$.

Тогда, функции

$U_{1nm}(x,y,z) = u_{1nm}(x,y) Z_m(z),\ n,m \in N$,

где $Z_m(z)$ и $u_{1nm}(x,y)$– функции, определяемые равенствами (10) и (51), являются непрерывными и нетривиальными в Ω^+ решениями уравнения (1), удовлетворяющие условиям $U(x,y,z)\big|_{\overline{S}_2 \cup \overline{S}_3 \cup \overline{S}_4} = 0$ и $U_x(x,y,z)\big|_{x=0} = 0$.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Urinov A.K., Karimov K.T. The Dirichlet problem for a three-dimensional equation of mixed type with three singular coefficients //Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences. – 2017. – T. 221. – №. 4. – C. 665-683.

2. Ватсон Г.Н. Теория бесселевых функций. –М.: Т.1.Изд. ИЛ., 1949. - 798 с.

3. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрические функции. Функции Лежандра. -М.: Наука, 1973. - 296 с.

4. Салахитдинов М.С., Уринов А.К. К спектральной теории уравнений смешанного типа. –Ташкент: Mumtoz So'z, 2010. -355 с.