ГАРМОНИК ВА СУБГАРМОНИК ФУНКЦИЯЛАР

HARMONIC AND SUBHARMONIC FUNCTIONS

ГАРМОНИЧЕСКИЕ И СУБГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

ТАТУ Фарғона филиали Табиий фанлар кафедраси ўқитувчиси **А. Шокиров**
ТАТУ Фарғона филиали 621.22-гуруҳ талабаси **Д. Рустамова**

Аннотация: *Ушбу мақолада гармоник ва субгармоник функсиялар ҳақида умумий маълумотлар берилади. Бундан ташқари асосий формулар таҳлил остига олиниб, мисоллар нуқтайи назаридан ёритилиб берилади.*

Калит сўзлар*: Гармоник ва субгармоник функсиялар, Пуассон ядроси, Дирихле масаласи.*

Abstract: *This article provides an overview of harmonic and subharmonic functions. In addition, the main formula is analyzed and explained from the point of view of examples.*

Key words*: Harmonic and subharmonic functions, Poisson kernel, Dirichlet's problem, maxima principle.*

Аннотация*: В данной статье даны общие сведения о гармонических и субгармонических функциях, кроме того, основная формула анализируется и поясняется с точки зрения примеров.*

Ключевые слова*: гармонические и субгармонические функции, ядро Пуассона, задача Дирихле, принцип максимума.*

Гармоник функсиялар - Лаплас тенгламасини каноатлантирадиган бирор соҳада биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилалари билан узлуксиз бўлган ҳақиқий функсиялар.

1⁰. *Гармоник функциялар.* $D \subset \mathbf{R}^n$ соҳада ушбу

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0$$

тенгламани қаноатлантирувчи $u \in C^2(D)$ функция *гармоник функция* дейилади, бунда

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

Лаплас оператори.

Барча гармоник функциялар тўплами $H(D)$ каби белгиланади.

I–т е о р е м а. Агар $u(x)$ гармоник функция бўлса, у ҳолда ихтиёрий $x^0 \in D$ нуқта ва $S(x^0, r) \subset D$ сфера учун

$$u(x^0) = \frac{1}{\sigma_n r^{n-1}} \int_{s(x^0,r)} u(x) d\sigma \qquad (5)$$

бўлади, бунда σ_n - бирлик сферанинг юзи.

Аксинча, агар Dдан олинган ҳар бир $x^0 \in D$ нуқта ва етарлича кичик $r(0 < r \le r^0(x^0))$ лар учун (5) формула ўринли бўлса, у ҳолда $u(x) \in H(D)$ бўлади. Энди гармоник функцияларнинг баъзи бир хоссаларини келтирамиз.

а) Агар $u, v \in H(D)$ бўлиб, $\lambda, \mu \in R$ бўлса, у ҳолда $\lambda u + \mu v \in H(D)$ бўлади;

б) агар умумлашган функция f учун $\Delta f = 0$, яъни ихтиёрий $\varphi \in F(D)$ да $f(\Delta\varphi) = 0$ тенглик бажарилса, у ҳолда f гармоник функция булади, аниқроқ қилиб айтганда, шундай $v(x) \in C^2(D)$, $\Delta v = 0$ бўлган функция мавжудки,

$$f(\varphi) = v(\varphi) = \int v(x)\varphi(x) dV$$

бўлади;

в) агар $u(x)$ функция $B(x^0, r)$ шарда гармоник, унинг ёпиғида эса узлуксиз, яъни

$$u(x) \in H(B(x^0, r)) \cap C(\overline{B(x^0, r)})$$

бўлса, у ҳолда

$$u(x) = \int_{S(x^0,r)} u(y) P(x, y) d\sigma(y)$$

формула ўринли бўлади, бунда

$$P(x, y) = \frac{r^2 - |x - x_0|^2}{\sigma_n(r)|x - y|^n}, \qquad n \ge 2$$

Пуассон ядроси.

Иккинчи томондан, агар $\varphi(y)$ функция $S(x^0, r)$ сферада узлуксиз бўлса, у ҳолда

$$u(x) = \int_{S(x^0,r)} \varphi(y) P(x, y) d\sigma(y)$$

функция $B(x_0, r)$ шарда ушбу

$$\Delta u = 0, \quad u|_{S(x^0,r)} = \varphi(y)$$

Дирихле масаласининг ечими бўлади.

Дирихле масаласини чегараси силлиқ бўлган ихтиёрий $D \subset R^n$ соҳада ҳам қараш мумкин: $\varphi(y) \in C(\partial D)$ учун ягона $u(x) \in C(\bar{D})$ мавжудки, $\Delta u = 0,\ u|_{\partial D} = \varphi(y)$ бажарилади;

г) комплекс текислик $C \approx R^2$ да гармоник функциялар голоморф функцияларга бевосита боғлангандир.

Ҳақиқатан ҳам, $z^0 = 0$ деб $B = B(0,r)$ доирада Пуассон формуласини ушбу

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\xi)\frac{r^2 - |z^2|}{|\xi - z|^2}dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\xi)\frac{\xi + z}{\xi - z}dt$$

бунда $\xi = re^{it}$, кўринишда ифодалаймиз. Бу формуладан $B(0,r)$ да голоморф

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\xi)\frac{\xi + z}{\xi - z}dt \qquad (6)$$

функцияси учун $\operatorname{Re} f(z) = u(z)$ эканлиги келиб чиқади. ►

(6) формула голоморф функцияни унинг ҳақиқий қисми орқали ифодалашда ҳам ишлатилади: ихтиёрий $f(z) \in O(B)\ IC(\bar{B})$ учун ушбу

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\xi)\frac{\xi + z}{\xi - z}dt + i\operatorname{Im} f(0)$$

формула ўринлидир.

2⁰. *Субгармоник функциялар.* Фараз қилайлик, $D \subset R^n$ соҳада аниқланган локал интегралланувчи

$$u : D \to [-\infty, +\infty)$$

функция берилган бўлсин, $u \in L^1_{loc}(D)$.

Агар бу функция қуйидаги икки шартни бажарса:

1) $u(x)$ юқоридан ярим узлуксиз:

$\forall x^0 \in D$ учун $\overline{\lim_{x \to x^0}} u(x) \le u(x^0)$

(бундан $u(x)$ функциянинг D га тегишли ихтиёрий компактда юқоридан чегараланганлиги келиб чиқади);

2) ҳар бир $x^0 \in D$ нуқта учун шундай $r(x^0) > 0$ топиладики, $r \le r(x^0)$ учун

$$u(x^0) \le \frac{1}{\sigma_n r^{n-1}} \int_{S(x^0,r)} u(x)d\sigma \qquad (7)$$

у ҳолда $u(x)$ функция D соҳада *субгармоник функция* дейилади.

Хулоса сифатида шуни айтишимиз керакки, гармоник ва субгармоник функсиялар баъзи бир ҳисоблашларда, шунингдек, ўз ўрнида келганда енг осон ҳисоблаш тури еканлигини билишимиз мумкин.

ФОЙДАЛАНИЛГАН АДАБИЁТЛАР РЎЙХАТИ:

1. Бохнер С., Мартин У., Функции многих комплексных переменных. ИЛ, 1951.
2. Салахитдинов М.С., Ўринов А. Қ. Краевые задачи для уравнений смешанного типа со спектральным параметром. –Тошкент: Фан.1992.168б.
3. Салохиддинов М.С., Ўринов А.Қ. Эллиптик типдаги бузиладиган дифференциал тенгламалар. Фарғона, 2005.
4. Салоҳиддинов М.С., Ўринов А.Қ. Гиперболик ва эллиптик типдаги бузиладиган дифференциал тенгламалар.-Тошкент: Университет, 2006.
5. Фукс Б.А., Введение в теорию аналитических функций многих комплексных переменных, Физматгиз, 1962.

ФОЙДАЛАНИЛГАН САЙТЛАР РЎЙХАТИ:

1.https://uz.wikipedia.org/wiki/Garmonik_funksiyalar
2.https://slib.uz/ru/article/index?tag_id=11832