КАСР ТАРТИБЛИ ЧИЗИҚЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМА УЧУН ЧЕГАРАВИЙ МАСАЛА

Достонбек Орипов Дилшодбек ўғли
Фарғона давлат университети таянч доктаранти
dastonbekoripov94@gmail.com

Аннотация: *Мақолада каср тартибли бир оддий дифференциал тенглама учун локал ва нолокал шартли чегаравий масала қўйилган ва бу масаланинг ечими ошкор кўринишда топилган.*

Annotation: *Boundary-value problems local and non-local conditions for a fractional order ordinary differential equation were set and solutions of these problems were found explicitly.*

Калит сўз ва иборалар: *каср тартибли ҳосила, каср тартибли оддий дифференциал тенглама, чегаравий масала, Миттаг-Леффлер функцияси.*

Key words and word expressions: *fractional derivative, fractional order ordinary differential equation, boundary-value problem, Mittag-Leffler's function.*

Агар тенгламада бир ўзгарувчили номаълум функциянинг фақат каср тартибли хосиласи қатнашса, бундай тенгламалар каср тартибли оддий дифференциал тенглама дейилади. Бутун тартибли оддий дифференциал тенгламаларга ўхшаш каср тартибли оддий дифференциал тенгламалар учун ҳам бошланғич ва чегаравий масалаларни ўрганиш мумкин[1,2,3,4]. Бундай тенгламалар учун бошланғич шартли масалалар ва локал ҳамда нолокал шартли масалаларни ҳам [5,6,7,8,..] ишларда ҳам кўриш мумкин.

[7] ишда каср тартибли

(1) $$D_{ax}^{\alpha_1}y(x)+p_1y'(x)+p_2D_{ax}^{\alpha_2}y(x)+p_3y(x)=f(x),\ \ a<x\le b,$$

$1<\alpha_1<2,\ 0<\alpha_2<1$

чизиқли оддий дифференциал тенглама учун Коши типидаги масала ўрганилган эди. Қуйида (1) тенглама учун чегаравий масалаларни ўрганамиз.

1-**масала**. (1) тенгламанинг

(2) $$\left[D_{ax}^{\alpha_1-1}y(x)+p_1y(x)+p_2D_{ax}^{\alpha_2-1}y(x)\right]_{x=a}=q_1$$

ва

(3) $$y(b)=q_2$$

шартларни қаноатлантирувчи $C_{2-\alpha_1}^{\alpha_1}[a,b]$ функциялар фазосида аниқланган ечими топилсин, бу ерда $q_1,q_2\in R$.

Маълумки, (1) тенгламанинг умумий ечими қуйидаги кўринишда эди[7]:

$$y(x)=\sum_{j=1}^{2}C_j\sum_{i=0}^{\infty}\left[p_1^i\frac{(x-a)^{\alpha_1 i+\alpha_1-j-1}}{\Gamma(\alpha_1 i+\alpha_1-j)}+p_2^i\frac{(x-a)^{\alpha_1 i+\alpha_1-i\alpha_2-j}}{\Gamma(\alpha_1 i+\alpha_1-i\alpha_2-j+1)}+p_3^{i-1}\frac{(x-a)^{\alpha_1 i+\alpha_1-j}}{\Gamma(\alpha_1 i+\alpha_1-j+1)}\right]+$$

(4) $$+\sum_{i=0}^{\infty}\left(p_1 D_{ax}^{1-\frac{i+2}{i+1}\alpha_1}+p_2 D_{ax}^{\alpha_2-\frac{i+2}{i+1}\alpha_1}+p_3 D_{ax}^{-\frac{i+2}{i+1}\alpha_1}\right)^{i+1} f(x).$$

Қуйида (4) умумий ечим формуласини (2) шартга бўйсундирсак,

(5) $$C_1=q_1$$

натижани оламиз.

Энди (4) ечимни (3) шартга бўйсундириб, C_2 ни топамиз:

$$C_2=\left\{q_2-\left[\sum_{i=0}^{\infty}\left(p_1 D_{ax}^{1-\frac{i+2}{i+1}\alpha_1}+p_2 D_{ax}^{\alpha_2-\frac{i+2}{i+1}\alpha_1}+p_3 D_{ax}^{-\frac{i+2}{i+1}\alpha_1}\right)^{i+1} f(x)\right]_{x=b}-\right.$$

$$\left.-q_1\cdot\sum_{i=0}^{\infty}\left[p_1^i\frac{(b-a)^{\alpha_1 i+\alpha_1-2}}{\Gamma(\alpha_1 i+\alpha_1-1)}+p_2^i\frac{(b-a)^{\alpha_1 i+\alpha_1-i\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha_1 i+\alpha_1-i\alpha_2)}+p_3^i\frac{(b-a)^{\alpha_1 i+\alpha_1-1}}{\Gamma(\alpha_1 i+\alpha_1)}\right]\right\}\times$$

(6) $$\times\left\{\sum_{i=0}^{\infty}\left[p_1^i\frac{(b-a)^{\alpha_1 i+\alpha_1-3}}{\Gamma(\alpha_1 i+\alpha_1-2)}+p_2^i\frac{(b-a)^{\alpha_1 i+\alpha_1-i\alpha_2-2}}{\Gamma(\alpha_1 i+\alpha_1-i\alpha_2-1)}+p_3^i\frac{(b-a)^{\alpha_1 i+\alpha_1-2}}{\Gamma(\alpha_1 i+\alpha_1-1)}\right]\right\}^{-1}$$

Демак, (4) формула қўйилган масаланинг ечими бўлади, бу ерда C_1 ва C_2 лар (5) ва (6) формулалар билан аниқланади.

Юқоридагилардан келиб чиқадики, қуйидаги теорема ўринли бўлади.

1-теорема. $1<\alpha_1<2,\ 0<\alpha_2<1,\ 0\le\gamma<1$ бўлсин. Агар $f(x)\in C_\gamma[a,b]$ бўлса, у холда {(1), (2), (3)} черагаравий масала ягона $y(x)\in C_{2-\alpha_1}^{\alpha_1}[a,b]$ ечимга эга бўлади ва бу ечим (4) формула билан топилади.

Фараз қилайлик, (4) тенгламада $p_1=p_3=0,\ p_2=\lambda,\ \alpha_1=\alpha,\ \alpha_2=\beta,\ f(x)\equiv 0$ ҳамда $x\in[0,1]$ бўлсин. У ҳолда (1) тенглама қуйидаги

(7) $$D_{0x}^{\alpha}y(x)-\lambda D_{0x}^{\beta}y(x)=0,\quad \alpha\in(1,2),\quad 0<\beta<\alpha$$

кўринишга ўтади. Биз қуйида (7) тенглама учун чегаравий масалаларни ўрганамиз.

2-масала. (7) каср тартибли чизиқли оддий дифференциал тенгламанинг

(8) $$\left[D_{0x}^{\alpha-2}y(x)\right]_{x=0}=k_1$$

ва

(9) $$y(1)=k_2$$

чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин, бу ерда k_1,k_2 -берилган сонлар.

Маълумки, (7) тенгламанинг умумий ечими (4) га асосан

(10) $$y(x)=C_1\cdot x^{\alpha-1}\cdot\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda^j\cdot x^{(\alpha-\beta)j}}{\Gamma((\alpha-\beta)j+\alpha)}+C_2\cdot x^{\alpha-2}\cdot\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda^j\cdot x^{(\alpha-\beta)j}}{\Gamma((\alpha-\beta)j+\alpha-1)}$$

кўринишда бўлади.

Агар (10) умумий ечим формуласини (8) шартга бўйсундирсак,

(11) $$C_2=k_1$$

натижани оламиз.

Энди (10) ечимни (9) шартга бўйсундирамиз:

$$y(1)=C_1\cdot\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda^j}{\Gamma((\alpha-\beta)j+\alpha)}+C_2\cdot\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda^j}{\Gamma((\alpha-\beta)j+\alpha-1)}=k_2.$$

Бу тенгликда (11) ни эътиборга олсак,

(12) $$C_1=\left[k_2-k_1\cdot\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda^j}{\Gamma((\alpha-\beta)j+\alpha-1)}\right]\times\left[\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda^j}{\Gamma((\alpha-\beta)j+\alpha)}\right]^{-1}$$

натижага эга бўламиз.

Юқоридагилардан кўринадики, {(7)-(9)} масаланинг ягона ечими

$$y(x)=\left[k_1-k_0\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda^j}{\Gamma((\alpha-\beta)j+\alpha-1)}\right]\times\left[\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda^j}{\Gamma((\alpha-\beta)j+\alpha)}\right]^{-1}\times\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda^j\cdot x^{(\alpha-\beta)j}}{\Gamma((\alpha-\beta)j+\alpha)}\times$$

(13) $$\times x^{\alpha-1}+k_0\cdot x^{\alpha-2}\cdot\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda^j\cdot x^{(\alpha-\beta)j}}{\Gamma((\alpha-\beta)j+\alpha-1)}$$

формула билан аниқланади.

Энди (7) тенглама учун Бицадзе-Самарский масаласини кўрамиз.

3-**масала.** (7) тенгламанинг

(8) $$\left[D_{0x}^{\alpha-2}y(x)\right]_{x=0}=k_1$$

ва

(14) $$y(1)=y(\xi)+k_2$$

шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин, бу ерда k_1,k_2,ξ −берилган сонлар бўлиб, $0<\xi<1$.

Маълумки, (7) тенгламанинг умумий ечими (10) формула билан аниқланади. (10) умумий ечим формуласини (8) шартга бўйсундирганимизда $C_2=k_1$ топилган эди. Қуйида (10) ечим формуласини (14) шартга бўйсундирамиз.

Бунинг учун $y(1)$ ва $y(\xi)$ ларни топамиз:

$$y(1)=C_1\cdot\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda^j}{\Gamma((\alpha-\beta)j+\alpha)}+C_2\cdot\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda^j}{\Gamma((\alpha-\beta)j+\alpha-1)},$$

$$y(\xi)=C_1\cdot\xi^{\alpha-1}\cdot\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda^j\cdot\xi^{(\alpha-\beta)j}}{\Gamma((\alpha-\beta)j+\alpha)}+C_2\cdot\xi^{\alpha-2}\cdot\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda^j\cdot\xi^{(\alpha-\beta)j}}{\Gamma((\alpha-\beta)j+\alpha-1)}.$$

Топилганларни (14) га қўйиб, C_1 ни топамиз:

(15) $$C_1=\frac{k_0\cdot\left[\xi^{\alpha-2}\cdot\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda^j\cdot\xi^{(\alpha-\beta)j}}{\Gamma((\alpha-\beta)j+\alpha-1)}-\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda^j}{\Gamma((\alpha-\beta)j+\alpha-1)}\right]+k_1}{\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda^j}{\Gamma((\alpha-\beta)j+\alpha)}-\xi^{\alpha-1}\cdot\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda^j\cdot\xi^{(\alpha-\beta)j}}{\Gamma((\alpha-\beta)j+\alpha)}}.$$

Юқоридагилардан кўринидаки, {(7), (8), (14)} масаланинг ечими (10) формула билан аниқланади, C_1 ва C_2 лар эса мос равишда (15) ва (11) лар билан берилади.

Қуйида (7) тенглама учун интеграл шартли масалани кўрайлик.

4-масала. (7) тенгламанинг

(8) $$\left[D_{0x}^{\alpha-2}y(x)\right]_{x=0}=k_1$$

ва

(16) $$y(1)=\int_a^b y(t)\,dt+k_2$$

шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин, бу ерда k_1,k_2,a,b−берилган сонлар бўлиб, $0\le a<b\le 1$.

Маълумки, (7) тенгламанинг умумий ечими (10) формула билан аниқланади. (10) ечим формуласини (8) шартга бўйсундирганимизда $C_2=k_0$ топилган эди. Энди (10) ечим формуласини (16) шартга бўйсундирамиз.

Бунинг учун $y(1)$ ва $\int_a^b y(t)dt$ ларни топамиз:

$$y(1)=C_1\cdot\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda^j}{\Gamma((\alpha-\beta)j+\alpha)}+C_2\cdot\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda^j}{\Gamma((\alpha-\beta)j+\alpha-1)},$$

$$\int_a^b y(t)dt=C_1\cdot\left(b^{\alpha}\cdot\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda^j\cdot b^{(\alpha-\beta)j}}{\Gamma((\alpha-\beta)j+\alpha+1)}-a^{\alpha}\cdot\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda^j\cdot a^{(\alpha-\beta)j}}{\Gamma((\alpha-\beta)j+\alpha+1)}\right)+$$
$$+C_2\cdot\left(b^{\alpha-1}\cdot\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda^j\cdot b^{(\alpha-\beta)j}}{\Gamma((\alpha-\beta)j+\alpha)}-a^{\alpha-1}\cdot\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda^j\cdot a^{(\alpha-\beta)j}}{\Gamma((\alpha-\beta)j+\alpha)}\right).$$

Топилганларни (16) га олиб бориб, C_1 ни топамиз:

(17)

$$C_1 = \frac{k_0 \cdot \left[b^{\alpha-1} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j \cdot b^{(\alpha-\beta)j}}{\Gamma\left((\alpha-\beta)j+\alpha\right)} - a^{\alpha-1} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j \cdot a^{(\alpha-\beta)j}}{\Gamma\left((\alpha-\beta)j+\alpha\right)} - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{\Gamma\left((\alpha-\beta)j+\alpha-1\right)} \right] + k_1}{\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{\Gamma\left((\alpha-\beta)j+\alpha\right)} - b^{\alpha} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j \cdot b^{(\alpha-\beta)j}}{\Gamma\left((\alpha-\beta)j+\alpha+1\right)} + a^{\alpha} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j \cdot a^{(\alpha-\beta)j}}{\Gamma\left((\alpha-\beta)j+\alpha+1\right)}}$$

Юқоридагилардан кўринадики, {(7), (8), (16)} масаланинг ечими (10) формула билан топилади, C_1 ва C_2 лар эса мос равишда (17) ва (11) лар аниқланади.

ФОЙДАЛАНИЛГАН АДАБИЁТЛАР:

[1]. A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo. “Theory and applications of fractional differential equations”. –Amsterdam: North-Holland Math. Stud., 204, Elsevier, 2006.

[2]. А.В.Псху. Начальная задача для линейного обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка // Математический сборник, 2011, том 202, №4, 111-122.

[3]. А.М. Нахушев. Дробное исчисление и его применение . -Москва: Физматлит, 2003.

[4]. А.Қ. Ўринов. Оддий дифференциал тенгламалар учун чегаравий масалалар. - Тошкент: Мумтоз сўз, 2014.

[5]. D.D. Oripov. Kasr tartibli oddiy differensial tenglama uchun lokal va nolokal masalalar // "FarDU.Ilmiy xabarlar" №6, Farg’ona, 2018 y, 17-20 betlar.

[6]. D.D. Oripov. Kasr tartibli oddiy differensial tenglama uchun lokal va nolokal shartli chegaraviy masala haqida // "FarDU.Ilmiy xabarlar" №1, Farg’ona, 2019 y, 108-110 betlar.

[7]. D.D. Oripov. Riman-Liuvill ma’nosidagi kasr tartibli bir chiziqli differensial tenglama uchun Koshi tipidagi masala haqida// Сборник материалов I Международной научно-практической конференции “Актуальные проблемы внедрения инновационной техники и технологий на предприятиях по производству строительных материалов, химической промышленностии в смежных отраслях” Фергана, 24-25 мая, 2019 г. 417-420 с.

[8]. D.D. Oripov. Riman-Liuvill ma’nosidagi kasr tartibli bir chiziqli differensial tenglama uchun chegaraviy masala//“Matematika va informatikaning zamonaviy muammolari” mavzusidagi Respublika ilmiy-amaliy anjumani Farg’ona, 2019-yil, 22-23-may, I tom, 154-155 bet.

[9]. Д.Д. Орипов. Некоторые краевые задачи для дифференциального уравнения дробного порядка//“Управление, оптимизация и динамические системы – CODS -2019” Xalqaro ilmiy konferensiya, Andijon, 2019 yil, 17-19 oktyabr, 130-bet.

[10]. D.D. Oripov. Kasr tartibli bir oddiy differensial tenglama uchun nolokal masalalar// “Differensial tenglamalar va matematikaning turdosh bo’limlari zamonaviy muammolari” mavzusidagi Xalqaro ilmiy konferensiya, Farg’ona, 2020 yil, 12-13 mart, 374-377 betlar.