

## ТЕОРЕМА ГАУССА И ПОЛЬКЕ-ШВАРЦА КАК ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА ПАРАЛЛЛЬНОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПРОЕКЦИИ АКСОНОМЕТРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

У.Т.Рихсибаев

*Ташкентский институт текстильной и легкой промышленности доцент*

**Краткое содержание:** В этой статье представлены результаты научно-исследовательской работы по изучению взаимоотношений параллельного проецирования системы Декартовой трёхмерной и аксонометрической двумерной.

А так же креативно анализируя теоремы Гаусса, Польке и Польке-Шварца, разработана единая теорема аксонометрии, теорема Гаусса и Польке-Шварца.

**Ключевые слова:** Аксонометрия, теория, практика, изображение, реальный, абстрактный, образ, наглядное изображение, произведение искусства, плоскости координат, система, проекция, вид, Декартовая система координатных плоскостей, треугольник следов, система аксонометрии, модель-аппарат, коэффициенты искажения, аксонометрические оси, направления проецирования.

В этой статье приводятся итоги научно-исследовательской работы проведенной по изучению взаимосвязь между теоремой Гаусса и Польке-Шварца.

Начертательная геометрия непосредственно связана, как и другие предметы, с математикой. И каждая фигура (точка, отрезок, прямая, плоскость и тела) имеет математический модуль - выражение, то есть формулу.

При помощи этих формул и математические выражения каждое изображение, эюр – чертёж и проекция исследуются и теоретически обосновываются .

В любой картинной плоскости произведений изобразительного искусства можно провести равносторонний треугольник ABC, стороны которого равны ( ) е.из. или произвольный треугольник, рис.1.



рис.1

Представим, что оси  $OX$ ,  $OY$  и  $OZ$  (равной или различной длины) Декартовой системы плоскостей координат  $OXYZ$  упираются к картинной (аксонометрической) плоскости по точкам  $A$ ,  $B$  и  $C$ . Если их соединит прямой, то образуется так называемый треугольник следов, как пересечения картинной – аксонометрической плоскости с упирающей к ней натуральной системой координатных плоскостей.

Таким образом, проведенный треугольник  $ABC$  является линией пересечения аксонометрической – картинной плоскости с системой Декартовой координатных ( $XOY$ ,  $XOZ$  и  $YOZ$ ) плоскостей и образуют треугольник  $\Delta A'B'C'$  совпадающей  $ABC$ .

Если точку  $O$  проецировать в любом направлении проецирования, то в аксонометрической плоскости, т.е. в этом треугольнике или за его чертой изображаются проекции начало натуральных координат как  $O'$  и осей  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  как  $X'$ ,  $Y'$ ,  $Z'$  в аксонометрической плоскости,

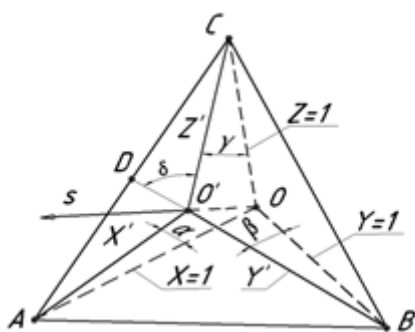


рис. 2

. В этом случае прямая  $OO'$ , является направлением проецирования  $s$ .

Треугольник  $ABC$ , точка  $O'$  и оси  $X'$ ,  $Y'$ ,  $Z'$  являются составной частью элементов которые определяют аксонометрическую систему.

Направление проецирования  $s$  относительно к плоскости аксонометрии может быть перпендикулярным или косоугольным. В зависимости от этого аксонометрические проекции бывают прямоугольным или косоугольным.

Немецкий учёный математик Гаусс (1839-40 годах) разработал основную теорему – ортогональной аксонометрической проекции на основе  $\Delta ABC$ , как результат пересечения пространственных координатных плоскостей с аксонометрической – картинной плоскостью.

Теорема Гаусса: Если через  $L$ ,  $M$ ,  $N$  обозначим комплексные число соответствующие радиусам-векторам  $l$ ,  $m$ ,  $n$ , то условие  $L^2 + M^2 + N^2 = 0$  является необходимым и достаточным для того чтобы упомянутые три радиуса – вектора служили ортогональной аксонометрической системой, [1].

Нужно отметить то, что на изданных литературах и научных трудах после 1960 годов о теореме Гаусса, которое является основной теоремой ортогональной аксонометрической системы ничего не сказано.

Воистину это так, наглядное изображение объекта в пространстве, который изображен на картинной-аксонометрической плоскости тремя радиусами векторов, является прямоугольной проекцией координатных осей Декартовой системы. По теореме Гаусса сумма квадратов комплексных чисел, состоит из ломанных линий –

как треугольник ABC, (рис. 2) и соответствующим комплексным числам радиус-векторов  $\ell, m, n$  являющимися биссектрисами углов A, B, C.

Натуральная координатная система OXYZ и аксонометрическая система O'X'Y'Z' непосредственно связаны направлением проецирования s.

Если направление s параллельна OX или OY или OZ, аксонометрическая плоскость соответствует координатным плоскостям проекций XOY-H или XOZ-V или YOZ-W. В таких случаях построенное изображение являются двумерными. То есть в этом случае O'X'Y'Z' вместо наглядного изображения, проецируется на традиционные три проекции: вид спереди, вид сверху и вид слева.

Если плоскость координат XOZ взять как V фронтальную плоскость, то аксонометрическая система O'X'Y'Z', изображается под прямым углом X'O'Z'. Так как ось O'Y' проецируется на плоскость V в виде точки. Полученное изображение называется фронтальной проекцией натуральной системы координатных плоскостей OXYZ. А также аналогично в горизонтальной (H) и в профильной (W) плоскостей проекции, можно получить горизонтальную и профильную проекцию Декартовой системы.

И так применяемые в начертательной геометрии горизонтальные, фронтальные и профильные проекции являются частным положением аксонометрической проекции.

В аксонометрической системе оси O'X', O'Y' и O'Z' проецируются в уменьшенной величине от единицы длины натуральных осей Декартовой системы их называются коэффициентами искажения, (u, v, w).

Из рис.2:  $u ; v = \text{ва } w = \quad (1)$

Имеющие общие противоположные катеты в прямоугольном AO'O, BO'O, CO'O треугольнике натуральные координатные оси с направлением проецирования ( $s \equiv O'O$ ) образуют углы  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ , которые дополняют углы  $\alpha, \beta, \gamma$  на  $90^\circ$ . Эти углы ( $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ ) направления проецирования (s) являются направляющими углами, (они не указаны на чертеже).

Из аналитической геометрии известно, что косинусы углов, имеющие общее направление равны 1:

$$\text{Cos}2\alpha_1 + \text{Cos}2\beta_1 + \text{Cos}2\gamma_1 = 1 \quad (2)$$

$$\alpha_1 = 900 - \alpha; \beta_1 = 900 - \beta \text{ и } \gamma_1 = 900 - \gamma$$

$$\text{Cos}\alpha_1 = \text{Sin}\alpha; \text{Cos}\beta_1 = \text{Sin}\beta \text{ и } \text{Cos}\gamma_1 = \text{Sin}\gamma.$$

Поэтому 2- значение преобразуем так:

$$\text{Sin}2\alpha + \text{Sin}2\beta + \text{Sin}2\gamma = 1 \quad (3)$$

$$\text{Sin}2\alpha = 1 - \text{Cos}2\alpha; \text{Sin}2\beta = 1 - \text{Cos}2\beta \text{ и } \text{Sin}2\gamma = 1 - \text{Cos}2\gamma:$$

3- значение приводим в такой вид:

$$(1 - \text{Cos}2\alpha) + (1 - \text{Cos}2\beta) + (1 - \text{Cos}2\gamma) = 1:$$

$$3 - \text{Cos}2\alpha - \text{Cos}2\beta - \text{Cos}2\gamma = 1.$$

Упростив это значение, приводим нижеследующую:

$$\text{Cos}2\alpha + \text{Cos}2\beta + \text{Cos}2\gamma = 2$$

Из 1- значение имеем  $u ; v =$  и  $w =$ , по этому:

$$u^2 + v^2 + w^2 = 2 \quad (4)$$

4- значение считается основной формулой аксонометрической проекции. Она является общим для ортогонального параллельного аксонометрического проецирования.

Например, на фронтальной проекции натуральной координатной системы OXYZ имеем  $u = w = 1$  и  $v = 0$ . Следовательно:  $1^2 + 0^2 + 1^2 = 2$ .

Поэтому уравнение 4 можно считать математическим модулем основной теоремы параллельной прямоугольной аксонометрии, то есть теоремы Гаусса:

1-Теорема: Сумма квадратов коэффициентов искажения осей в параллельной прямоугольной аксонометрии равна 2.

Потому что оси  $X', Y', Z'$  в аксонометрической системе совпадают радиус-векторами  $(l, m, n)$  треугольника следов. И они как комплексные числа  $i^2 + 1 = 0$  имеют значения, сумма которых равно 0 или могут быть больше этого.

Если угол направления проецирования  $\varphi$  не равна нулю, то она (s) находится относительно аксонометрической - картинной плоскости наклонно, (рис.3) и сумма квадрата длины радиус-вектора-аксонометрических осей равняется 2 и на  $\text{ctg } \varphi$  больше, [3,4].

$$u^2 + v^2 + w^2 = 2 + \text{ctg } \varphi = 2 + n; \text{ Здесь } \text{ctg } \varphi = n \text{ и } n = 0, \infty. \quad (5)$$

В 5-уровнении равенства два получаются, если  $\varphi = 90^\circ$  т.е. в прямоугольной параллельной аксонометрии.

Следовательно, радиус – векторы Гаусса является ортогональной параллельной проекцией Декартовой системы координатных плоскостей OXYZ в пространстве. Эта условия считается достаточным и необходимым для образования аксонометрической системы.

А в косоугольной аксонометрии  $\text{ctg } \varphi = 0, \infty$ , т.е.:

$$u^2 + v^2 + w^2 > 2 \quad (6)$$

Из этого следует следующая теорема косоугольной аксонометрической проекции:

Сумма квадратов коэффициентов искажения в косоугольной параллельной аксонометрии больше чем 2.

Потому что значение  $\text{ctg } \varphi$  будет стремиться к увеличению до бесконечно неизвестной величине ( $\infty$ ).

Посмотрим это на рисунках 3 и 4. Для этого через O проводим восемь произвольных направлений проецирования и определяем как  $O'$ , восемь проекции  $O1', O2', O3', \dots, O8'$  точки O на аксонометрической плоскости PA. Так же на рисунке 4 показаны соответствующие величины суммы квадратов расстояний от вершин треугольника следов до каждого.

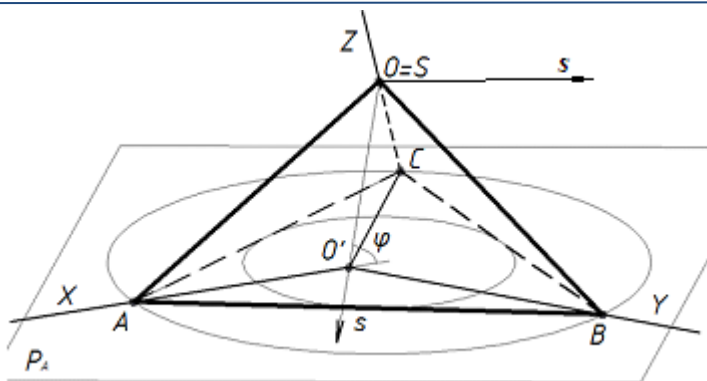


Рис. 3

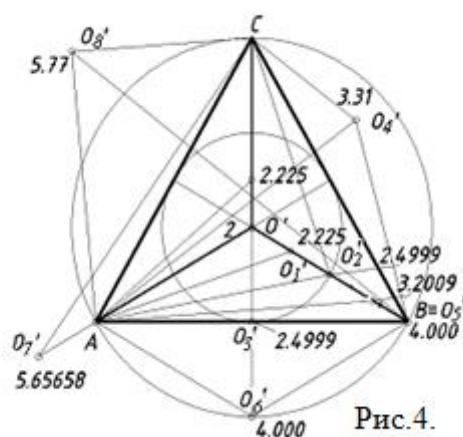


Рис.4.

Если проекция начало координат  $O$  (как  $O_1', O_2', O_3'$ ) окажется внутри или на окраине окружности вписанного в треугольник  $ABC$ , то  $\text{ctg } \varphi$  изменится от  $0$  до  $0,5$ , то есть  $b$ -выражение равняется в пределах  $2, 2.5$ .

Если проекция начало координат  $O$  находится (как  $O_4', O_5' \equiv B, O_6'$ ) внутри или в пределах черты окружности, описанного на треугольник  $ABC$ , то  $b$ -выражение равняется в пределах  $2,5, 4$ .

Если проекция начало координат  $O$  находится (как  $O_7'$  и  $O_8'$ ) вне окружности описанного на треугольник  $ABC$ , то  $b$ -выражение увеличится от  $4$  до бесконечности.

Сопоставляя вышеизложенные теоремы с теоремами Польке и Польке – Шварца, которые применялись до сей поры, считаем нужным пересмотреть и усовершенствовать теорем Гаусса, Польке и Польке-Шварца. Так как в этих двух последних теоремах некоторые слова и высказывания не исключены от сомнения.

Так как эти теоремы были изложены (предложены) так:

Теорема Польке: Любые три отрезки выходящие из одной точки на плоскости могут быть приняты за параллельные проекции трех равных и взаимно перпендикулярных отрезков в пространстве.

Теорема Польке – Шварца:

Любой полный четырехугольник на плоскости всегда можно рассматривать как параллельную проекцию тетраэдра подобного заданному. Тетраэдр – в данном случае треугольная пирамида произвольной формы, [4].

Поэтому проанализировав эти теоремы и креативно подойдя к ним, убрав выше изложенные сомнительные выражения, можно прийти к следующему новому усовершенствованному изложению:

Три отрезка произвольной длины, которые исходят от одной точки лежащей внутри или снаружи равностороннего треугольника следов на аксонометрической плоскости и проходящие через его вершины являются параллельной или косоугольной проекцией Декартовой системы равными осями координат. Эту теорему назвали основной теоремой аксонометрической системы проецирования, теоремой Гаусса и Польке-Шварца. Потому что эта усовершенствованная теорема содержит смысл и сущность теорем этих учёных.

И эта теорема, без каких либо сомнений, является настоящей теоремой прямоугольной параллельной проекций Декартовой системы координатных плоскостей в пространстве.

В результате выше проведённых исследований, установлены следующие отношения между Декартовой и аксонометрической системами:

1. Аксонометрическая двух мерная система проецирования,  $(O'X'Y'Z')$  является проекцией пространства Декартовой трёх мерной системы  $(OXYZ)$ . Точка  $O'$  является параллельной проекцией точки  $O$ , начала натуральных осей координат. Аксонометрические оси координат  $(O'X', O'Y', O'Z')$  является параллельной проекцией натуральных координатных осей  $OX, OY, OZ$  равной длины. Треугольник следов  $(\Delta ABC)$  является общей для Декартовой и аксонометрической системы. И они непосредственно связана с направлением проецирования  $s \equiv OO'$ , проходящая под прямым или косым углом плоскости аксонометрии-картины.

2. Виды (спереди, сверху и слева) объектов являются частным случаем аксонометрической системы проецирования. Для этого достаточно взять направление проецирования параллельно к осям  $X$  или  $Y$  или  $Z$ .

3. Впервые с помощью теоремы Гаусса, обоснована основная теорема параллельного прямоугольного (ортогонального) и косоугольного аксонометрического проецирования.

4. На основании теоремы Гаусса, Польке и Польке-Шварца усовершенствовано изложение основной теоремы параллельного аксонометрического проецирования и эту теорему называли основной теоремой системы аксонометрического проецирования, теоремой Гаусса и Польке-Шварца.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Е.А.Глазунов и Н.Ф.Четверухин. АКСОНОМЕТОИЯ. М.1953. 108-110 стр. (291 стр.)
2. О.Гордон и др.Курс начертательной геометрии. М. Наука, 1988 г., 236-237 стр. (270 стр.)



3. В.Е.Михайленко и А.М.Пономарев. “Инженерная графика”, 167-180 стр. Киев, ВИЩА ШКОЛА, 1980. (234 стр.)
4. С.А.Фролов. Начертательная геометрия, М., 1978, 203-208 стр. (269 стр.)
5. Рихсибоев, У. Т., Халилова, Х. Э., & Синдарова, Ш. М. (2022). AutoCAD дастуридан фойдаланиб деталлардаги ўтиш чизикларини куришни автоматлаштириш. Science and Education, 3(4), 534-541.
6. Bobomurotov, T. G., & Rikhsiboev, U. T. (2022). Fundamentals Of Designing Triangles Into Sections Equal 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17 And 19. Central Asian Journal of Theoretical and Applied Science, 3(2), 96-101.
7. Takhirovi, A. U., & Makhammatovna, S. S. (2023). Forming Creativity through the Use of Modern Educational Tools. International Journal of Formal Education, 2(6), 404-409.
8. Rixsiboyev, U. T., & Maxammatovna, S. S. (2023). TEXNOLOGIK VOSITALAR ORQALI INNOVATSION DARS TASHKIL QILISH. ОБРАЗОВАНИЕ НАУКА И ИННОВАЦИОННЫЕ ИДЕИ В МИРЕ, 20(8), 168-175.
9. Sindarova, S. M., Rikhsibaev, U. T., & Khalilova, H. E. (2022). THE NEED TO RESEARCH AND USE ADVANCED PEDAGOGICAL TECHNOLOGIES IN THE DEVELOPMENT OF STUDENTS' CREATIVE RESEARCH. Academic research in modern science, 1(12), 34-40.
10. Sindarova, S. (2023). AUTOCAD DASTURIDAN FOYDALANIB TALABALARNING IJODIY IZLANISHLARINI RIVOJLANTIRISH. Наука и технология в современном мире, 2(14), 38-41.
11. Mirzaliyev, Z. E., Sindarova, S., & Eraliyeva, S. Z. (2021). Develop students' knowledge, skills and competencies through the use of game technology in the teaching of school drawing. American Journal of Social and Humanitarian Research, 2(1), 58-62.
12. Mirzaliyev, Z., Sindarova, S., & Eraliyeva, S. (2019). Organization of Independent Work of Students on Drawing for Implementation of the Practice-Oriented Approach in Training. International Journal of Progressive Sciences and Technologies, 17(1), 297-298.
13. Sindarova, Shoxista Maxammatovna (2021). O‘YINLI TEXNOLOGIYALARDAN FOYDALANISH ORQALI O‘QUVCHILARNING BILIM, KO‘NIKMA VA MALAKALARINI SHAKLLANTIRISH ( CHIZMACHILIK FANI MISOLIDA). Oriental renaissance: Innovative, educational, natural and social sciences, 1 (11), 686-691.
14. Makhammatovna, S. S. (2023). Pedagogical and Psychological Aspects of Improving the Methods of Developing Students' Creative Research. Web of Semantic: Universal Journal on Innovative Education, 2(3), 37-41.
15. Abdurahimova, F. A., Ibrohimova, D. N. Q., Sindarova, S. M., & Pardayev, M. S. O. G. L. (2022). Trikotaj mahsulotlar ishlab chiqarish uchun paxta va ipak ipini tayyorlash va foydalanish texnologiyasi. Science and Education, 3(4), 448-452.
16. Maxammatovna, S. S. (2022). Methods of Solving Some Problems of Teaching Engineering Graphics. Spanish Journal of Innovation and Integrity, 7, 97-102.

17. Синдарова, Ш. (2023). Yosh ijodkorlarni qo‘llab quvvatlash va ular bilan ishlashni tashkil qilish. *Общество и инновации*, 4(2), 177-181.
18. Makhammatovna, S. S. (2023). DEVELOPMENT OF ENGINEERING GRAPHICS STUDENTS TO CREATIVITY THROUGH IMAGINATION VIEWS. *Лучшие интеллектуальные исследования*, 3(1), 22-26.
19. Sindarova, S. (2023). TALABALARDA IJODIY IZLANUVCHANLIKKA XOS SIFATLARNI SHAKILLANTIRISH USULLARI. *Академические исследования в современной науке*, 2(11), 23-29.
20. Sindarova Shoxista Maxammatovna, & Maxmudov Abdunabi Abdug‘afforovich (2022). MUHANDISLIK GRAFIKASI FANLARINI O‘QITISHDA IJODIY IZLANISH TALAB QILINADIGAN MASALALAR. *Ta‘lim fidoyilari*, 24 (17), 2-275-284.
21. Shoxista, S. Abdug‘aforovich, MA (2022). METHODOLOGY OF STUDENT CAPACITY DEVELOPMENT IN TEACHING ENGINEERING GRAPHICS. *Gospodarka i Innowacje*, 22, 557-560.
22. Sindarova, S. M. (2021). IQTIDORLI TALABALAR BILAN SHUG‘ULLANISH METODIKASI.(MUHANDISLIK FANLARI MISOLIDA). *Oriental renaissance: Innovative, educational, natural and social sciences*, 1(8), 32-39.
23. Shoxista, S. (2023). MUHANDISLIK GRAFIKASI FANINI O‘ZLASHTIRISHDA ZAMONAVIY DASTURDAN FOYDALANISH ORQALI TALABALAR IJODKORLIGINI RIVOJLANTIRISH. *Innovations in Technology and Science Education*, 2(9), 780-790.