НЕСТАНДАРТНЫЕ СПОСОБЫ РЕШЕНИЯ КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Сюткина Светлана Михайловна

Преподаватель математики высшей категории академического лицея Ташкентского государственного экономического университета, город Ташкент, Узбекистан

Аннотация: *В данной статье коротко рассказано об истории квадратных уравнений, рассмотрено свойство квадратного уравнения с суммой коэффициентов, равной нулю, приведены некоторые способы решения квадратных уравнений.*

Ключевые слова: *квадратное уравнение, неприведенное квадратное уравнение, разложение на множители, полный квадрат, теорема Виета.*

Уравнения занимают в курсе алгебры важное место. Они являются результатом решения многих практических задач. Некоторые алгебраические приемы решения линейных и квадратных уравнений были известны еще 4000 лет назад в Древнем Вавилоне.

На всем протяжении развития математической культуры вплоть до XIX в. под прямым влиянием нужд общественной практики математикам приходилось заниматься поисками общих приемов решений уравнений. Для примера достаточно указать китайцев (II – I в. до н. э.) Чжан Цана и Цзин Чоу-чана, которые привели первое описание способа извлечения квадратного и кубического корней и изложили способ решения некоторых квадратных уравнений, китайца Ван Сяотуна (VII в.), который, не владея общим методом решения кубического уравнения в радикалах, пользовался приближенным методом решения, по форме совпадающим с известным методом, открытым в 1819 г. английским математиком Горнером. В первой половине IX в. среднеазиатский ученый Мухаммад Ал-Хорезми, а затем в XII в. индиец Бхаскара привели общий метод решения квадратных уравнений. В XI в. среднеазиатский математик Омар Хайям дал геометрический метод решения уравнения 3-й степени на основании свойства конических сечений.

Простейшими из уравнений являются линейные и квадратные уравнения. Остальные виды уравнений сводятся к линейным или квадратным уравнениям. Поэтому учащиеся должны владеть различными и быстрыми способами решения квадратных уравнений.

Рассмотрим некоторые способы решения квадратных уравнений.

I. Решение квадратных уравнений разложением на множители.

Чтобы решить квадратное уравнение этим методом нужно представить слагаемое, содержащее x, в виде суммы двух слагаемых и разложить левую часть уравнения на множители способом группировки.

Пример: $2x^2 - 7x - 4 = 0$

$$2x^2 - 8x + x - 4 = 0$$
$$2x(x-4) + (x-4) = 0$$
$$(x-4)(2x+1) = 0$$
$$x - 4 = 0 \quad \text{и} \quad 2x + 1 = 0$$
$$x_1 = 4; \quad x_2 = -\frac{1}{2}$$

2. Решение квадратных уравнений методом выделения полного квадрата.

Чтобы решить квадратное уравнение этим методом нужно привести его к такому виду, чтобы, 1) первое слагаемое было квадратом; 2) коэффициент при x был четным.

Пример: $2x^2 + 5x - 11 = 0$

Умножим обе части уравнения на 8. Получим:

$$16x^2 + 40x - 88 = 0$$
$$(4x)^2 + 2 \cdot 4x \cdot 5 + 25 - 25 - 88 = 0$$
$$(4x+5)^2 = 113$$
$$4x + 5 = \pm\sqrt{113}$$
$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{113}}{4}$$

3. Решение квадратного уравнения, в котором $a + b + c = 0$.

Если $a + b + c = 0$ в уравнении $ax^2 + bx + c = 0$, то

$$x_1 = 1; \text{а } x_2 = \frac{c}{a}$$

Доказательство:

Выразим любой из коэффициентов a, b или c из равенства $a + b + c = 0$. Например, $c = -(a+b)$, подставим в формулу корней квадратного уравнения:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4a(a+b)}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4a^2 + 4ab}}{2a}$$
$$= \frac{-b \pm \sqrt{(2a+b)^2}}{2a} =$$
$$= \frac{-b \pm (2a+b)}{2a}; \quad x_1 = \frac{-b+2a+b}{2a} = 1; \quad x_2 = \frac{-b-2a-b}{2a} = \frac{-2(a+b)}{2a} = \frac{c}{a}.$$

Пример: $3x^2 + x - 4 = 0$

Так как $a + b + c = 3 + 1 - 4 = 0$, то $x_1 = 1$; $x_2 = -\frac{4}{3}$.

4. Решение квадратного уравнения, в котором $a - b + c = 0$ или $b = a + c$.

Если $a - b + c = 0$ или $b = a + c$ в уравнении $ax^2 + bx + c = 0$, то

$$x_1 = -1; \text{а } x_2 = -\frac{c}{a}$$

Доказательство:

Выразим любой из коэффициентов a, b или c из равенства $a - b + c = 0$. Например, $c = -(a-b)$, подставим в формулу корней квадратного уравнения:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4a(a-b)}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4a^2 - 4ab}}{2a}$$
$$= \frac{-b \pm \sqrt{(2a-b)^2}}{2a} =$$
$$= \frac{-b \pm (2a-b)}{2a}; \; x_1 = \frac{-b+2a-b}{2a} = \frac{2(a-b)}{2a} = -\frac{c}{a}; \quad x_2 = \frac{-b-2a+b}{2a} = \frac{-2a}{2a} = -1.$$

Пример:

$$3x^2 + 5x + 2 = 0$$

Так как $a - b + c = 0$, то $x_1 = -1; \quad x_2 = -\frac{2}{3}$.

5. Решение неприведённых квадратных уравнений с использованием теоремы Виета.

Рассмотрим уравнение $ax^2 + bx + c = 0$. Докажем, что корни уравнения $x^2 + bx + ac = 0$ равны корням данного уравнения, умноженным на a.

Доказательство:

Решим уравнение $ax^2 + bx + c = 0$.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{1}{a} \cdot \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2}$$

Решим уравнение $x^2 + bx + ac = 0$.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2}$$

Это свойство даёт возможность решать некоторые квадратные уравнения устно.

Пример:

$$2x^2 - 9x + 9 = 0$$

$D > 0$, корни положительные. Вспомогательное уравнение

$$x^2 - 9x + 18 = 0$$

Его корни $x_1 = 3; \quad x_2 = 6$. Корни искомого уравнения получим, разделив найденные корни на 2, т. е. корни данного уравнения

$x_1 = 1{,}5; \quad x_2 = 3$.

Приведенные способы решения квадратных уравнений помогут учащимся быстро решать как квадратные уравнения, так и уравнения, приводящиеся к квадратным уравнениям.

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА:

1. Глейзер Г. И. История математики в школе VII – VIII классы. Пособие для учителей. – М.: Просвещение, 1982.
2. Пичурин Л. Ф. За страницами учебника алгебры: Кн. для учащихся 7-9 кл. сред. шк. – М.: Просвещение, 1990.
3. Муравин К. С. и др. Алгебра 8 кл.: Учебн. для общеобразоват. учебных заведений. – М.: Дрофа, 2001.