РАЗРЕШИМОСТЬ НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ЭЛЛИПТИКО-ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Акбарова С. Х.
Андижанский государственный университет
Шамшидинов М. Н.
Ферганский государственный университет

Аннотация: *В статье исследуется нелокальная краевая задача для смешанного эллиптико-параболического уравнения с двумя линиями и различными порядками вырождения. Используя принципа экстремума доказана единственность решения задачи, а существование решения с помощью метода интегральных уравнений.*

Ключевые слова: *краевая задача, уравнения смешанного типа, , регулярное решение, линия вырождения, интегральное уравнение.*

Пусть $\Omega -$ конечная, односвязная область, ограниченная отрезками $OA,\ AB,$ BB_0 прямых $y=0,\ x=h_1,\ y=h$ при $x>0$, $y>0$ и гладкой кривой

$$\sigma : \frac{1}{q_2^2}(-x)^{2q_2} + \frac{1}{p_2^2}y^{2p_2} = 1$$

с концами в точках $A_0(-h_2,0),\ B_0(0,h)$ и отрезкой A_0O прямой $y=0$ при $x<0$, $y>0,$ где $O=O(0,0),\ A=A(h_1,0),\ B=B(h_1,h);$

$$h_1=(2q_1)^{1/q_1},\ h_2=q_2^{1/q_2},\ h=p_2^{1/p_2},\ 2q_1=n_1+2,\ 2q_2=n_2+2,\ 2p_2=m+2,$$
$m,n_1,n_2=const.$

В области Ω изучается нелокальная краевая задача для смешанного эллиптико-параболического уравнения вида

$$0=\begin{cases} y^{m+1}u_{xx}-x^{n_1}u_y, x>0, \\ y^m u_{xx}+(-x)^{n_2}u_{yy}, x<0. \end{cases} \qquad (1)$$

здесь $\quad m>0,\quad n_1>n_2>m.$ (2)

Следует отметить, что исследованиям локальных и нелокальных краевых задач для смешанного эллиптико-параболического уравнения с двумя линиями и различными порядками вырождения посвящены работы [1], [2].

Введем обозначения

$$\Omega_1=\{(x,y): 0<x<h_1, 0<y<h\},\ \Omega_2=\{(x,y): -h_2<x<0, 0<y<h\},$$

$x=\mu(y)$ - заданная функция из класса $C^1[0,h],$ причем $0\le \mu(y)\le h.$

Задача ТВ. Определить функцию $u(x,y),$ со следующими свойствами:

1) $u(x,y)\in C(\overline{\Omega})\cap C^1(\Omega)\cap C^{2,1}(\Omega_1)\cap C^2(\Omega_2);$

2) $u(x,y)$ - удовлетворяет уравнению (1) в областях $\Omega_1, \Omega_2;$;

3) удовлетворяет краевым условиям

$$u\big|_{y=0} = \varphi_1(x),\ 0 \le x \le h_1, \qquad (3)$$

$$u(h_1, y) + \theta(y)u(\mu(y), y) = \varphi_2(y), \quad 0 \le y \le h, \qquad (4)$$

$$u\big|_{\sigma} = \psi_1(x,y),\ (x,y) \in \overline{\sigma}, \quad (5) \qquad u_y\big|_{y=0} = \psi_2(x),\ -h_2 < x < 0, \quad (6)$$

где $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(y)$, $\theta(y)$, $\psi_1(x,y)$, $\psi_2(x)$, $\theta(y)$ - заданные функции, причем

$$\varphi_1(x) \in C(0 \le x \le h_1) \cap C^2(0 < x < h_1), \qquad (7)$$

$$\theta(y), \varphi_2(y) \in C[0,h] \cap C^2(0,h), \qquad (8)$$

$$\varphi_1(h_1) = \varphi_2(0),\ \theta(0) = 0,$$

а функция $\psi_1(x,y)$, имеет вид

$$\psi_1(x,y) = xy\overline{\psi}_1(x,y),\ \overline{\psi}_1(x,y) \in C(\overline{\sigma}). \qquad (9)$$

Доказана следующая теорема.

Теорема. Если выполняется условие (2),

$$|\theta(y)| \le 1, \qquad (10)$$

то решение задачи ТВ существует и единственно.

Единственность решения задачи ТВ следует из принципа экстремума. Применяя метод интегральных уравнений доказывается существование решения.

Замечание. В задаче ТВ непрерывные условия склеивания на линии изменения типа $x = 0$ можно заменить разрывными условиями вида

$$u(+0,y) = u(-0,y) + \delta_1(y),\ u_x(+0,y) = u_x(-0,y) + \delta_2(y),$$

где $\delta_1(y), \delta_2(y) -$ заданные достаточно гладкие функции.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Салахитдинов М.С., Исломов Б.И. Уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения.ТГПУ.- Т.: MUMTOZ SO'Z, 2009. 264.

2. Акбарова С.Х. Об одной краевой задаче для уравнения эллиптико-параболического типа с различными порядками вырождения: Тезисы докл.Междунар.науч.конф."Дифференциальные и интергральные уравнения. Математическая физика и специальные функции". –Самара, 1992. _С. 11.