НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ТРЕХМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С СИНГУЛЯРНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ В ОБЛАСТИ, СОСТОЯЩЕЙ ИЗ ЧЕТВЕРТИ ЦИЛИНДРА И ТРЕУГОЛЬНОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПРИЗМЫ

Д.С.Олимова
Ферганский военно-академический лицей Министерства обороны "школа Темурбеков", dilfuza.olimova.76@bk.ru;

Пусть $\Omega=\Delta\times(0,c)$, $c=const>0$, где $\Delta-$конечная односвязная область плоскости xOy, ограниченная при $y\geq 0$ дугой $\bar{\sigma}_0$ и отрезком $\overline{OM}$, а при $y\leq 0-$ отрезками $\overline{OQ}$ и $\overline{QP}$, $\sigma_0=\{(x,y):x^2+y^2=1, x>0, y>0\}$, $OM=\{(x,y):x=0, 0<y<1\}$, $OQ=\{(x,y):x+y=0, 0<x<1/2\}$, $QP=\{(x,y):x-y=1, 1/2<x<1\}$.

Введем обозначения: $\Omega_0=\Omega\cap(y>0)$, $\Omega_1=\Omega\cap(y<0)$.

В области Ω уравнение

$$U_{xx}+(\operatorname{sgn} y)U_{yy}+U_{zz}+\frac{2\gamma}{z}U_z=0,\ \gamma<1/2 \qquad (1)$$

принадлежит смешанному типу, т.е. в области Ω_0 $-$эллиптическому типу, а в области Ω_1- гиперболическому типу. Плоскости $\bar{\Omega}_0\cap\bar{\Omega}_1$ и $z=0$ соответственно являются плоскостей изменения типа и сингулярности уравнения (1).

Задача 1. Найти функцию $U(x,y,z)$, удовлетворяющую в областях $\Omega_j, j=\overline{0,1}$ уравнению (1) и следующим условиям:

$$U(x,y,z)\in C(\bar{\Omega})\cap C^1(\Omega)\cap C^{2,2,2}_{x,y,z}(\Omega_0\cup\Omega_1),\ z^{2\gamma}U_z\in C(\bar{\Omega});$$

$$U(x,y,0)=F_1(x,y),\ \ U(x,y,c)=F_2(x,y),\ (x,y)\in\bar{\Delta};$$

$$U(x,y,z)=0,\ (x,y,z)\in\bar{\sigma}_0\times(0,c);\ U(0,y,z)=0,\ (0,y,z)\in\overline{OM}\times(0,c);$$

$$A^{0,\sqrt{\lambda}}_{0x}\{U[\theta_1(x,z)]\}+\delta_1 U(x,0,z)=0,\ (x,0,z)\in\overline{OP}\times(0,c),$$

где F_1, F_2 $-$заданные функции, δ_1 $-$заданное действительное число,

$$A^{n,\lambda}_{mx}[f(x)]\equiv f(x)-\int\limits_m^x f(t)\left(\frac{t-m}{x-m}\right)^n\frac{\partial}{\partial t}J_0\left[\lambda\sqrt{(x-m)(x-t)}\right]dt\ [1],$$

$J_\nu(z)-$функция Бесселя первого рода порядка ν.

Очевидно, что если $(x,0,z)\in\overline{OP}\times(0,c)$, то $\theta_1(x,z)\in\overline{OQ}\times(0,c)$. Поэтому (6) является нелокальным условием, связывающим значения искомой функции

$U(x,y,z)$ на плоскости $\overline{OQ}\times(0,c)$ с её значением на плоскости изменения типа $\overline{OP}\times(0,c)$. Следовательно, задача 1 является нелокальной задачей [2], [3].

В данной работе доказана следующая теорема.

Теорема. Пусть $\gamma\in(-\infty,1/2)$ и функции $F_1(x,y)=f_1(\rho,\varphi)$ и $F_2(x,y)=f_2(\rho,\varphi)$, где $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$, $\varphi=arctg(y/x)$, удовлетворяет следующим условиям:

I. $f_l(\varphi,z)\in C^{2,2}_{\rho,\varphi}(\overline{\Pi})$, $l=1,2$, где $\Pi=\{(\rho,\varphi):\rho\in(0,1),\varphi\in(0,\pi/2)\}$;

II. $\left.\frac{\partial^j}{\partial\varphi^j}f_l(\rho,\varphi)\right|_{\varphi=0}=0$, $\left.\frac{\partial^j}{\partial\varphi^j}f_l(\rho,\varphi)\right|_{\varphi=\pi/2}=0$, $\left.\frac{\partial^j}{\partial z^j}f_l(\rho,\varphi)\right|_{\rho=0}=0$, $\left.\frac{\partial^j}{\partial z^j}f_l(\rho,\varphi)\right|_{\rho=1}=0$, $j=0,1,2$.

Тогда решение задачи 1 в области Ω существует и определяется формулой

$$U(x,y,z)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}U_{nm}(x,y,z),$$

где

$$U_{nm}(x,y,z)=\begin{cases}\sqrt{2}Z_{nm}(z)\sin\left[\left(2n-\frac{1}{2}\right)\varphi+\frac{\pi}{4}\right]J_{2n-1/2}(\sigma_{nm}\rho),\ (x,y,z)\in\Omega_0;\\ Z_{nm}(z)\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^{n-1/4}J_{2n-1/2}(\sigma_{nm}\rho),\ (x,y,z)\in\Omega_1,\end{cases}$$

$$Z_{nm}(z)=P_{nm}(z)f_{2nm}+\left[\bar{K}_{1/2-\gamma}(\sigma_{nm}z)-P_{nm}(z)\bar{K}_{1/2-\gamma}(\sigma_{nm}c)\right]f_{1nm},$$

$$f_{lnm}=\int_0^1\int_0^{\pi/2}f_l(\rho,\varphi)\left[\cos(\omega_n\varphi)+(1+2\gamma_1)\sin(\omega_n\varphi)\right]J_{\omega_n}(\sigma_{nm}\rho)d\varphi d\rho,$$

$P_{nm}(z)=\left(\frac{z}{c}\right)^{1/2-\gamma}\frac{I_{1/2-\gamma}(\sigma_{nm}z)}{I_{1/2-\gamma}(\sigma_{nm}c)}$, $\bar{K}_\nu(x)=\frac{2^{1-\nu}x^\nu K_\nu(x)}{\Gamma(\nu)}$, $\nu>0$, $I_l(x)$ и $K_l(x)$– функция Бесселя мнимого аргумента и функция Макдональда порядка l [4] соответственно, $\omega_n=2n-\frac{2}{\pi}arcctg(1+2\delta_1),n\in N$, а σ_{nm}– положительные корни уравнения $J_{1/2-\gamma}(x)=0$.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Салахитдинов М.С., Уринов А.К. К спектральной теории уравнений смешанного типа. –Ташкент: Mumtoz So'z, 2010. -355 с.

2. Нахушев А.М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных. –М.: Наука, 2006. -288 с.

3. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. –М.: Высшая школа, 1995. -301 с.

4. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. –М.: Т.1.Изд. ИЛ., 1949. -798 с.