

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ТРЕХМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С СИНГУЛЯРНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ В ОБЛАСТИ, СОСТОЯЩЕЙ ИЗ ЧЕТВЕРТИ ЦИЛИНДРА И ТРЕУГОЛЬНОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПРИЗМЫ

Д.С.Олимова

*Ферганский военно-академический лицей Министерства обороны "школа
Темурбеков", dilfuza.olimova.76@bk.ru;*

Пусть $\Omega = \Delta \times (0, c)$, $c = \text{const} > 0$, где Δ – конечная односвязная область плоскости xOy , ограниченная при $y \geq 0$ дугой $\bar{\sigma}_0$ и отрезком \overline{OM} , а при $y \leq 0$ – отрезками \overline{OQ} и \overline{QP} , $\sigma_0 = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1, x > 0, y > 0\}$, $OM = \{(x, y) : x = 0, 0 < y < 1\}$, $OQ = \{(x, y) : x + y = 0, 0 < x < 1/2\}$, $QP = \{(x, y) : x - y = 1, 1/2 < x < 1\}$.

Введем обозначения: $\Omega_0 = \Omega \cap (y > 0)$, $\Omega_1 = \Omega \cap (y < 0)$.

В области Ω уравнение

$$U_{xx} + (\text{sgn } y)U_{yy} + U_{zz} + \frac{2\gamma}{z}U_z = 0, \quad \gamma < 1/2 \quad (1)$$

принадлежит смешанному типу, т.е. в области Ω_0 – эллиптическому типу, а в области Ω_1 – гиперболическому типу. Плоскости $\bar{\Omega}_0 \cap \bar{\Omega}_1$ и $z = 0$ соответственно являются плоскостей изменения типа и сингулярности уравнения (1).

Задача 1. Найти функцию $U(x, y, z)$, удовлетворяющую в областях $\Omega_j, j = \overline{0, 1}$ уравнению (1) и следующим условиям:

$$U(x, y, z) \in C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega) \cap C_{x,y,z}^{2,2,2}(\Omega_0 \cup \Omega_1), \quad z^{2\gamma}U_z \in C(\bar{\Omega});$$

$$U(x, y, 0) = F_1(x, y), \quad U(x, y, c) = F_2(x, y), \quad (x, y) \in \bar{\Delta};$$

$$U(x, y, z) = 0, \quad (x, y, z) \in \bar{\sigma}_0 \times (0, c); \quad U(0, y, z) = 0, \quad (0, y, z) \in \overline{OM} \times (0, c);$$

$$A_{0,x}^{0,\sqrt{\lambda}} \{U[\theta_1(x, z)]\} + \delta_1 U(x, 0, z) = 0, \quad (x, 0, z) \in \overline{OP} \times (0, c),$$

где F_1, F_2 – заданные функции, δ_1 – заданное действительное число,

$$A_{mx}^{n,\lambda} [f(x)] \equiv f(x) - \int_m^x f(t) \left(\frac{t-m}{x-m} \right)^n \frac{\partial}{\partial t} J_0 \left[\lambda \sqrt{(x-m)(x-t)} \right] dt \quad [1],$$

$J_\nu(z)$ – функция Бесселя первого рода порядка ν .

Очевидно, что если $(x, 0, z) \in \overline{OP} \times (0, c)$, то $\theta_1(x, z) \in \overline{OQ} \times (0, c)$. Поэтому (6) является нелокальным условием, связывающим значения искомой функции

$U(x, y, z)$ на плоскости $\overline{OQ} \times (0, c)$ с её значением на плоскости изменения типа $\overline{OP} \times (0, c)$. Следовательно, задача 1 является нелокальной задачей [2], [3].

В данной работе доказана следующая теорема.

Теорема. Пусть $\gamma \in (-\infty, 1/2)$ и функции $F_1(x, y) = f_1(\rho, \varphi)$ и $F_2(x, y) = f_2(\rho, \varphi)$, где $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = \text{arctg}(y/x)$, удовлетворяет следующим условиям:

I. $f_l(\varphi, z) \in C_{\rho, \varphi}^{2,2}(\bar{\Pi})$, $l = 1, 2$, где $\Pi = \{(\rho, \varphi) : \rho \in (0, 1), \varphi \in (0, \pi/2)\}$;

II. $\frac{\partial^j}{\partial \varphi^j} f_l(\rho, \varphi) \Big|_{\varphi=0} = 0$, $\frac{\partial^j}{\partial \varphi^j} f_l(\rho, \varphi) \Big|_{\varphi=\pi/2} = 0$, $\frac{\partial^j}{\partial z^j} f_l(\rho, \varphi) \Big|_{\rho=0} = 0$,

$\frac{\partial^j}{\partial z^j} f_l(\rho, \varphi) \Big|_{\rho=1} = 0$, $j = 0, 1, 2$.

Тогда решение задачи 1 в области Ω существует и определяется формулой

$$U(x, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} U_{nm}(x, y, z),$$

где

$$U_{nm}(x, y, z) = \begin{cases} \sqrt{2} Z_{nm}(z) \sin \left[\left(2n - \frac{1}{2} \right) \varphi + \frac{\pi}{4} \right] J_{2n-1/2}(\sigma_{nm} \rho), & (x, y, z) \in \Omega_0; \\ Z_{nm}(z) \left(\frac{x+y}{x-y} \right)^{n-1/4} J_{2n-1/2}(\sigma_{nm} \rho), & (x, y, z) \in \Omega_1, \end{cases}$$

$$Z_{nm}(z) = P_{nm}(z) f_{2nm} + \left[\bar{K}_{1/2-\gamma}(\sigma_{nm} z) - P_{nm}(z) \bar{K}_{1/2-\gamma}(\sigma_{nm} c) \right] f_{1nm},$$

$$f_{lnm} = \int_0^1 \int_0^{\pi/2} f_l(\rho, \varphi) \left[\cos(\omega_n \varphi) + (1 + 2\gamma_1) \sin(\omega_n \varphi) \right] J_{\omega_n}(\sigma_{nm} \rho) d\varphi d\rho,$$

$$P_{nm}(z) = \left(\frac{z}{c} \right)^{1/2-\gamma} \frac{I_{1/2-\gamma}(\sigma_{nm} z)}{I_{1/2-\gamma}(\sigma_{nm} c)}, \quad \bar{K}_\nu(x) = \frac{2^{1-\nu} x^\nu K_\nu(x)}{\Gamma(\nu)}, \quad \nu > 0, \quad I_l(x) \quad \text{и}$$

$K_l(x)$ – функция Бесселя мнимого аргумента и функция Макдональда порядка l [4]

соответственно, $\omega_n = 2n - \frac{2}{\pi} \text{arctg}(1 + 2\delta_1)$, $n \in N$, а σ_{nm} – положительные корни

уравнения $J_{1/2-\gamma}(x) = 0$.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Салахитдинов М.С., Уринов А.К. К спектральной теории уравнений смешанного типа. –Ташкент: Mumtoz So'z, 2010. -355 с.



2. Нахушев А.М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных. – М.: Наука, 2006. -288 с.
3. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. –М.: Высшая школа, 1995. -301 с.
4. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. –М.: Т.1.Изд. ИЛ., 1949. -798 с.