

SFERA SIRTIDA JOYLASHGAN FIGURALAR YUZINI TOPISH USULLARI

B. A. Mardonov*SamDAQU “Ijtimoiy va tabiiy fanlar”
kafedrasida katta o’qituvchisi,***J. A. Sindarov***SamDAQU doktranti,*

Maqolada sfera sirtida joylashgan ikkiburchak va uchburchak tushunchasi, uning yuzasini topish masalasi qaralgan. Sferada joylashgan geometrik figuralarning xarakterli munosabatlarini trigonometrik formulalar orqali izohlash astronomiya va geodeziya sohasida ahamiyatga ega.

Kalit so’zlar: sfera, sfera sirtida joylashgan ikkiburchak, sferada joylashga uchburchak, sferik ortiqlik, yuza.

В статье рассмотрено понятие двуугольника и треугольника в сфере, нахождение площади её поверхности. Изучение характерных отношений геометрических фигур в сфере с использованием тригонометрических формул важно в астрономии и геодезии.

Ключевые слова: сфера, двуугольник размещенная на сфере, треугольник размещенная на сфере, сферический избыток, площадь поверхности.

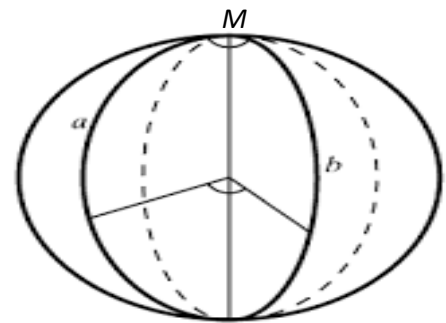
In article the concept of a two-square and a triangle of sphere, a finding of the area of its surface is considered. Studying of characteristic relations of geometrical figures in sphere with use of trigonometrical formulas important in astronomy and a geodesy.

Keywords: sphere, a two-square placed on sphere, a triangle placed on sphere, spherical surplus, the surface area.

Yangi O’zbekistonimizda aviasozlik, mashinasozlik, gidrotexnika, qurilish, yer tuzilishi, geodeziya, kartografiya, asrtonomiya va boshqa ko’plab fanlarning masalalarini yechishda matematikaning trigonometrik munosabatlariga murojaat qilinadi.

Bunda tekislikdagi trigonometrik munosabatlardan tashqari sferik sitrda joylashgan figuralarning xarakterli munosabatlarini trigonometrik formulalar orqali izohlashga zarurat tug’iladi. Bunday zaruriyatlarni “Oliy geodeziya”, “Astronomik geodeziya”, “Sferik geodeziya” kabi fanlarini o’rgatishda ko’rish mumkin. Ushbu maqola sfera sirtida joylashgan eng sodda sferik figura - sferik ikkiburchak va sferik uchburchaklar elementlari orasidagi geometrik va trigonometrik bo’g’lanishlar yordamida uning yuzasini topish formulasini keltirib chiqarish va xulosalar olish maqsadida tayyorlandi.

Sfera markazidan o’tuvchi istalgan tekislikning sfera bilan kesishishidan hosil bo’lgan aylanasi katta aylana, boshqa barcha aylanalar kichik aylanalardir. Sferada



M_1
1-rasm

joylashgan ikkita turli nuqtalarni sfera bo'ylab yo'ylar bilan tutashtirish mumkin. Bunday yo'ylar cheksiz ko'p bo'ladiki, ularning ichidan eng qisqa uzunlikka ega bo'lgan yoy alohida xarakterlidir, chunki bunday yoy uzunligini qaralayotgan sfera radiusi va mos markaziy burchak orqali ifodalasa bo'ladi. Sferaning ikkita nuqtasi orasidagi qisqa masofa deganda ularni tutashtiruvchi katta aylana yoyi tushuniladi [2].

Sferaning ikkita katta aylanalari chegaralab turgan qismiga sferik ikki burchak deyiladi (1-rasm). Sferik ikki burchakning burchaklari o'zaro teng, tomonlari ham o'zaro tengdir. Radiusi R bo'lgan sferadagi sferik ikkiburchakning tomonlari katta aylana uzunligining yarmi bo'lgani uchun, sferik ikkiburchak tomoni uzunligining gradus o'lchovi 180^0 ga tengdir, yoki radian o'lchovi uchun ushbu tenglik o'rinli $\cup MM_1 = \frac{2\pi R}{2} = \pi R$ bo'ladi.

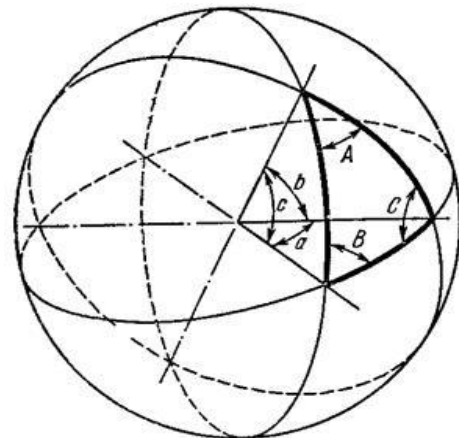
Sferik ikkiburchakning yuzisini hisoblash uchun uning burchagini M , yuzini S_{MM_1} deb

olib, ushbu proporsiyani tuzib mumkin: $\frac{S_{MM_1}}{4\pi R^2} = \frac{M}{360^0}$, bu yerda $4\pi R^2$ – sfera sirtining yuzasi. Tuzilgan proporsiyadan sferik ikkiburchak yuzini hisoblash uchun quyidagi formulani hosil qilish mumkin

$$S_{MM_1} = \frac{M}{90^0} \cdot \pi R^2 \quad (1)$$

yozilgan tenglikdan ko'rinadiki sferik ikkiburchak yuzi uning burchagini 90^0 ga bo'lishdan hosil bo'lgan sonni katta aylana chegaralab turgan doira yuziga ko'paytirishdan hosil bo'ladigan miqdorga teng ekan.

Sferaning bitta katta aylanasi ustida yotmaydigan uchta nuqtalarining har ikkitasidan o'tuvchi katta aylanalarning yo'ylari chegaralab turgan sferik sirt, sfera sirtida joylashga uchburchak yoki qisqacha sferik uchburchak deyiladi. Sferik uchburchakning uchlari va ularga mos burchaklarini bir xil bosh harflar bilan, burchaklar qarshisidagi tomonlarni (yo'ylarni) mos ravishda bir xil mos kichik harflar bilan belgilanadi. Masalan ABC - sferik uchburchak deganda A, B, C - sferik uchburchakning bir vaqtda uchlari va burchaklarini belgilanishini, a, b, c - sferik uchburchakning A, B, C burchaklari (uchlari) qarshisidagi tomonlari (mos katta aylana yo'ylari) belgilanishini bildiradi (2-rasm).



2-rasm

ABC sferik uchburchak a, b, c tomonlari va A, B, C burchaklari uchun quyidagi munosabatlar o'rinlidir: 1) $a+b>c, a+c>b, b+c>a$; 2) $a-b<c, a-c<b, b-c<a$; 3) $0<a+b+c<360^0$; 4) $180^0<A+B+C<360^0$; 5) $A+B-C<180^0, A+C-B<180^0, B+C-A<180^0$.

ABC sferik uchburchak a, b, c tomonlari va A, B, C burchaklari uchun quyidagi munosabatlar o'rinlidir: 1) $a+b>c, a+c>b, b+c>a$; 2) $a-b<c, a-c<b, b-c<a$; 3) $0<a+b+c<360^0$; 4) $180^0<A+B+C<360^0$; 5) $A+B-C<180^0, A+C-B<180^0, B+C-A<180^0$.

Sferik uchburchak ortiqligi (ekssessi) deganda A, B va C burchaklari orqali topiluvchi $\varepsilon=A+B+C-180^0$ tenlik bilan aniqlanadigan, hamda a, b va c tomonlari orqali esa

$\operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{4} = \sqrt{\operatorname{tg} \frac{p}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{p-a}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{p-b}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{p-c}{2}}$ tenglik (bunda $2p=a+b+c$) bilan aniqlanadigan miqdor tushuniladi [1].

Radiusi R bo'lgan sferadagi ABC sferik uchburchakning S_{ABC} yuzasini hisoblash formulasini keltirib chiqaramiz. Qaralayotgan ABC sferik uchburchak uchun $A_1B_1C_1$ simmetrik sferik uchburchak bo'lsin. U holda ABC sferik uchburchakning a, b, c tomonlari bo'yicha qo'shma bo'gan A_1BC, B_1AC, C_1AB sferik uchburchaklar paydo bo'ladi (3-rasm). Qo'shma sferik uchburchaklar yuzalarining yig'indisi ularning umumiy tomoniga mos burchakga to'g'ri keluvchi sferik ikkiburchakning yuziga teng bo'ladi. Bu tengliklarni belgilashga muvofiq quyidagicha yozib olamiz: $S_{ABC} + S_{A_1BC} = S_{AA_1}$, $S_{BAC} + S_{B_1AC} = S_{BB_1}$, $S_{CBA} + S_{C_1BA} = S_{CC_1}$. Yozilgan uchala tenglikning o'ng tomonida qaralayotgan sferik uchburchak burchaklariga mos sferik ikkiburchaklar yuzalarini topish formulalarini yozib, so'ngra uchala tenglikni o'zaro qo'shamiz

$$3S_{ABC} + S_{A_1BC} + S_{B_1AC} + S_{C_1BA} = \frac{\pi R^2}{90^0} \cdot A + \frac{\pi R^2}{90^0} \cdot B + \frac{\pi R^2}{90^0} \cdot C$$

bundan,

$$2S_{ABC} + S_{ABC} + S_{A_1BC} + S_{B_1AC} + S_{C_1BA} = \frac{A+B+C}{90^0} \cdot \pi R^2 \quad (2)$$

tenglikni hosil qilamiz. Keltirilgan 3-rasmga muvofiq C_1BA sferik uchburchak CB_1A_1 sferik uchburchakka simmetrikdir. Simmetrik sferik uchburchaklarning yuzalari miqdor jihatdan o'zaro teng, ya'ni $S_{C_1AB} = S_{CB_1A_1}$ shart bajariladi. Bu shartni (2) tenglikning chap tomonida inobatga olib va oxirgi to'rtta qo'shiluvchi qaralayotgan sfera sirti yuzasining yarmi ekanligidan, $2S_{ABC} + 2\pi R^2 = \frac{A+B+C}{90^0} \cdot \pi R^2$ yoki, bundan

$$S_{ABC} = \frac{A+B+C-180^0}{180^0} \cdot \pi R^2$$

Oxirgi tenglikda $A+B+C-180^0 = \varepsilon$ ekanini inobatga olib, sfera sirtida joylashgan uchburchak ya'ni sferik uchburchak yuzasini hisoblash formulasiga ega bo'lamiz:

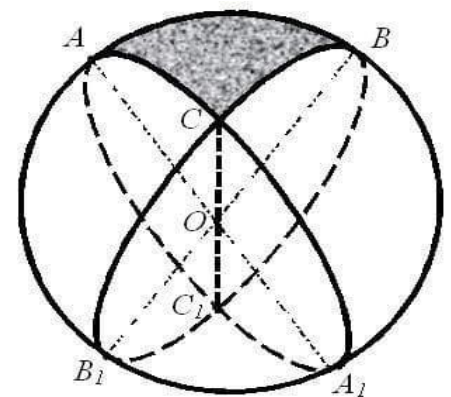
$$S_{ABC} = \frac{\pi R^2}{180^0} \cdot \varepsilon$$

(4)

Demak, R radiusli sfera sirtida joylashgan MM_1 sferik ikkiburchakning yuzasi $S_{MM_1} = \frac{M}{90^0} \cdot \pi R^2$ formula bilan, ABC

sferik uchburchakning yuzasi $S_{ABC} = \frac{\pi R^2}{180^0} \cdot \varepsilon$ formula bilan

topilar ekan.



3-rasm

Misol. Agar radiusi $R = 6700000 \text{ m}$ bo'lgan sferada joylashgan ABC sferik uchburchakning burchaklari $A = 79^{\circ}33'20''$, $B = 65^{\circ}28'20''$, $C = 37^{\circ}52'40''$ ga teng bo'lsa, sferik uchburchakning eksessini va yuzini toping.

Δ Sferik uchburchak eksessini topish formulasi $\varepsilon = A + B + C - 180^{\circ}$ ga ko'ra $\varepsilon = 79^{\circ}33'20'' + 65^{\circ}28'20'' + 37^{\circ}52'40'' - 180^{\circ} = 0^{\circ}03'03''$ demak, $\varepsilon = 0^{\circ}03'03''$.

ABC sferik uchburchakning yuzini topish formulasi

$S_{ABC} = \frac{\pi R^2}{180^{\circ}} \cdot \varepsilon$ dan foydalanib, berilgan kattaliklarni inobarga olib, smartfon

kalkulyatorida hisoblaymiz: $\varepsilon = 0^{\circ}03'03'' = \left(0 + \frac{3}{60} + \frac{3}{3600}\right)^{\circ} = 0,0508^{\circ}$,

$R = 6700000 \text{ m} = 6700 \text{ km}$, $S_{ABC} = (\varepsilon \div 180) \times \pi \times R^2$, $S_{ABC} = 39800,698 \text{ km}^2 \blacktriangle$.

Sferada joylashgan ikkiburchak va uchburchak xossalariidan, ularning yuzasini topish formulalaridan foydalanib, geodezik va astronomik tadqiqotlarda foydalanish mumkin bo'ladi. Yer sharida joylashgan katta miqdordagi maydonlarning yuzalarini uni uchburchaklar shaklida qismlarga ajratib, uchlari joylashish koordinalari yordamida oson topish imkonini beradi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR:

1. Степанов Н.Н. Сферическая тригонометрия /Учебное пособия/- Ленинград «ОГИЗ», 1948. 155-с.
2. Mamasoliyev Q., Mardonov B. Sferik trigonometriya /O'quv qo'llanma/-Toshkent. "MASHHUR-PRESS", 2019.-144с.