МАТРИЦАНИНГ РАНГИ ВА УНИ ҲИСОБЛАШ. ТЕСКАРИ МАТРИЦА ВА УНИ ТОПИШ

Жамолов Шаҳбоз Жамил ўғли
Тошкент кимё-технология институти Шаҳрисабз филиали

Системаларни моделлаштиришда *матрицалар алгебраси* деган тушунча муҳим аҳамиятга эга. Режалаштириш муаммолари, ялпи маҳсулот, жами меҳнат сарфи, нархни аниқлаш ва бошқа масалалар ҳамда уларда компьютерларни қўллаш матрицалар алгебрасини қарашга олиб келади.

A $m\times n$ ўлчовли матрицада k сатр ва k та устунини ажратамиз, бунда, k, m ва n сонлардан кичик ёки уларнинг кичигига тенг бўлиши мумкин. Ажратилган сатр ва устунларнинг кесишувида ҳосил бўлган k -тартибли детерминантга A *матрицанинг* k *-тартибли минори дейилади.*

Таъриф. A матрицанинг 0 дан фарқли минорларининг энг юқори тартибига A *матрицанинг ранги* дейилади. A матрицанинг ранги $rangA$ ёки $r(A)$ билан белгиланади.

Матрица рангини бевосита ҳисоблашда кўп сондаги детерминантларни ҳисоблашга тўғри келади. Қуйидаги амаллардан фойдаланиб матрица рангини ҳисоблаш қулайроқ. Матрицада:

1)фақат 0 лардан иборат сатри (устуни)ни ўчиришдан;

2) иккита сатр (устун)нинг ўринларини алмаштиришдан;

3) бирор сатр (устун)нинг элементларини бирор $\lambda \neq 0$ сонга кўпайтириб, бошқа сатр (устун) мос элементларига қўшиш; 4) матрицани транспонирлашдан, унинг ранги ўзгармайди.

Бу амалларга одатда *элементар алмаштиришлар* дейилади.

1-мисол. $$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 2 & -6 & -5 \\ 1 & -4 & -2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

матрицанинг рангини ҳисобланг.

Ечиш. A матрицанинг рангини ҳисоблаш учун элементар алмаштиришлардан фойдаланамиз. Биринчи сатр элементларини иккинчи сатр элементларига, биринчи сатр элементларини (-2)га кўпайтириб, учинчи сатр элементларига, ҳамда учинчи сатр элементларини тўртинчи сатр элемнтларига қўшиб қуйидаги матрицани ҳосил қиламиз:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -3 & -1 \\ 5 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 5 & 1 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Кейинги матрицада 2-сатрини (-1) га кўпайтириб тўртинчи сатрига қўшсак

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -3 & -1 \\ 5 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

матрица ҳосил бўлади. Бу матрицада

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 5+2=7\neq 0$$

бўлиб, тўртинчи тартибли минорлар 0 га тенг. Шундай қилиб, берилган матрицанинг ранги 3 га тенг.

Юқоридагилардан келиб чиққан ҳолда тескари матрица ва уни топишга эътиборимизни қаратсак. A квадрат матрица учун $AB=BA=E$ бирлик матрица бўлса, B квадрат матрица A матрицага *тескари матрица* дейилади. Одатда, A матрицага тескари матрица A^{-1} билан белгиланади.

Теорема: A квадрат матрица тескари матрицага эга бўлиши учун A матрицанинг детерминанти 0 дан фарқли бўлиши зарур ва етарлидир. (Бу теоремани исботсиз келтирдик, унинг исботини кенгроқ дастурли курслардан топиш мумкин.

Aквадрат матрица учун $\det A\neq 0$ бўлса , унга тескари бўлган ягона матрица A^{-1} мавжуд.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} \\ -------- & \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nn} \end{pmatrix}$$

матрицага тескари A^{-1} матрица

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21}\cdots A_{n1} \\ A_{12} & A_{22}\cdots A_{n2} \\ -------- & \\ A_{1n} & A_{2n}\cdots A_{nn} \end{pmatrix}$$

формула билан топилади. Бунда A_{ij} мос равишда a_{ij} элементларнинг алгебраик тўлдирувчилари ва $\Delta = \det A$.

Тескари матрицани топишга мисол қараймиз.

2-мисол. Ушбу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

матрицага тескари матрицани топинг.

Ечиш. Олдин A матрицанинг детерминантини ҳисоблаймиз:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 18 + 4 + 3 - 2 - 12 - 9 = 2 \neq 0.$$

Юқоридаги теоремага асосан тескари матрица мавжуд, чунки

$$\Delta = 2 \neq 0$$

яъни, берилган матрица махсусмас матрицадир. A^{-1} ни топиш учун A матрица ҳамма элементларининг алгебраик тўлдирувчиларини топамиз:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 6, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = -5, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = -6, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = 8,$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 2,$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1.$$

Тескари матрицани топиш

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

формуласига асосан

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 & -6 & 2 \\ -5 & 8 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -2{,}5 & 4 & -1{,}5 \\ 0{,}5 & -1 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$

бўлади. A^{-1} тескари матрицанинг тўғри топилганлигини

$$AA^{-1}=A^{-1}A=E$$

тенгликнинг бажарилиши билан текшириб кўриш мумкин, ҳақиқатан ҳам,

$$AA^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&-3&1\\-2.5&4&-1.5\\0.5&-1&0.5\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot3+1\cdot(-2.5)+1\cdot0.5 & 1\cdot(-3)+1\cdot4+1\cdot(-1) & 1\cdot1+1\cdot(-1.5)+1\cdot0.5\\1\cdot3+2\cdot(-2.5)+4\cdot0.5 & 1\cdot(-3)+2\cdot4+4\cdot(-1) & 1\cdot1+2\cdot(-1.5)+4\cdot0.5\\1\cdot3+3\cdot(-2.5)+9\cdot0.5 & 1\cdot(-3)+3\cdot4+9\cdot(-1) & 1\cdot1+3\cdot(-1.5)+9\cdot0.5\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

яъни, $AA^{-1}=E$ бирлик матрица ҳосил бўлади, бу A^{-1} тескари матрицанинг тўғри топилганлигини исботлайди.

ФОЙДАЛАНИЛГАН АДАБИЁТЛАР РЎЙХАТИ:

1. Д.Юнусова, А.Юнусов “Алгебра ва сонлар назарияси” Тошкент – 2007
2. Юнусов. Математик мантиқ ва алгоритмлар назарияси елементлари. Т., Янги аср авлоди, 2006.
3. Тўраев Ҳ. Математик мантиқ ва дискрет математика. Т., «Ўқитувчи», 2003.