ИЗОМЕТРИИ ОБОБЩЕННЫХ *LOG*-АЛГЕБР

Мадаминов Бекзод Аллаёрович
PhD Ургенчского государственного университета
Рахимбайев Жўрабек Собирович
Преподаватель Ургенчского государственного университета
Душамова Фотима Шоназар қизи
Студентка Ургенчского государственного университета

Аннотация: *В настоящей статье вводится обобщенное понятие log-алгебр, которые являются F-пространствами функций интегрируемых с логарифмом. В последней теореме доказано необходимое и достаточное условие изометричности этих F-пространств.*

Annotation: *In this paper, we introduce a generalized concept of log-algebras, which are F-spaces of functions integrable with a logarithm. In the last theorem, a necessary and sufficient condition for the isometricity of these F-spaces is proved.*

Ключевые слова: *log-алгебры, F-пространства, строгоположительные конечные меры, изометрии.*

Keywords: *log-algebras, F-spaces, strictly positive finite measures, isometries.*

В настоящей статье рассматриваются пространства комплекснозначных функций интегрируемых с логарифмом $L_{\log}\left(\Omega, \mathrm{A}, \mu\right)$ и их изометрии. Эти пространства рассматривались в работах [1],[2],[3].

Интерес к этим пространствам вызван тем, что они близки к классу функций

Неванлинна N голоморфных в круге и интегрируемых с логарифмом на границе круга

[4] , т.е. удовлетворяющих условию

$$L(f) := \sup_{r<1} \frac{1}{2\pi} \int \log(1 + \left| f(re^{io}) \right| do) < \infty \qquad .$$

Так как логарифм от голоморфной функции будет субгармонической функцией, то можно сказать, что класс Неванлинна устанавливает связь между голоморфными функциями и теорией потенциалов. Известно [5], что существует инъективный гомоморфизм Φ из N в $L_p(T,m)$, где m мера Хаара на единичном круге. Функция $\| f \|_N = \| \Phi(f) \|_{\log}$ является F – нормой на N.

Определение 1. [5] Булева алгебра называется *полной*, если всякое множество ее элементов имеет верхнюю и нижнюю грани.

Обозначим через $\nabla = \nabla_\mu$ полную Булеву алгебру всех классов эквивалентности $[A]$, где A - класс μ – почти всюду равных множеств из σ – алгебры A. Пусть $L_0(\nabla_\mu) = L_0\left(\Omega, \mathrm{A}, \mu\right)$ алгебра эквивалентных классов комплекснозначных функции на $(\Omega, \mathrm{A}, \mu)$. Следуя [2], рассмотрим в $L_0(\nabla_\mu)$ подалгебру $L_{\log}(\nabla_\mu) = \{f \in L_0(\nabla_\mu) : \int\limits_\Omega \log(1+|f|)d\mu < +\infty\}$

$\log-$интегрируемых измеримых комплекснозначных функций, и для каждого $L_{\log}(\nabla_\mu)$ положим $\|f\|_{\log,\mu} = \int\limits_\Omega \log(1+|f|)d\mu.$

Определение 2. $F-$нормой на линейном пространстве L называется положительный функционал $\|\cdot\| : L \to R^+$ удовлетворяющий следующим условиям

(i). $\|x\| \geq 0,\ \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0,\ \forall x \in L;$

(ii). $\|\lambda x\| \leq \|x\|,\quad \forall x \in L,\quad \lambda \in R,\ \ \lambda \leq 1;$

(iii). $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|,\quad \forall x, y \in L.$

Определение 3. $F-$пространство это линейное пространство, в котором введена $F-$норма, относительно которой это пространство полно.

Из свойств $(i), (ii)$, (iv) и утверждения 1 следует, что функция $\|\cdot\|_{\log,\mu} : L_{\log}\left(\nabla_\mu\right) \to [0,\infty)$ является $F-$нормой, а из свойства (v) следует, что $L_{\log}\left(\nabla_\mu\right)$ замкнуто относительно операции умножения.

Из работы [2] следует.

Утверждение 1. Пространство $L_{\log}\left(\nabla_\mu\right)$ полно относительно $F-$нормы $\|\cdot\|_{\log,\mu}$.

Пусть X −произвольная полная булева алгебра, $e \in X, X_e = [0,e] = \{g \in X : g \leq e\}$. Через $\tau(X_e)$ обозначим минимальную мощность множества, плотного в X_e в (o)-топологии.

Определение 4. Бесконечная полная булева алгебра X называется *однородной*, если $\tau(X_e) = \tau(X_g)$ для любых ненулевых $e, g \in X$.

Однородные булевы алгебры были рассмотрены в работе [6].

Обозначим через $M(\nabla)$ множество всех конечных строго положительных мер на булевой алгебре ∇.

Теорема 1. [4] Пусть ∇_μ однородная булева алгебра и $\mu, \nu \in M(\nabla)$.. Тогда $F-$пространства $L_{\log}(\nabla_\mu)$ и $L_{\log}(\nabla_\nu)$ изометричны тогда и только тогда, когда $\mu(\Omega) = \nu(\Omega)$.

Пусть $\mu, \nu \in M(\nabla)$, $0 \leq \dfrac{d\nu}{d\mu} := h-$производная Радона - Никодима, т.е.

$$\int\limits_\Omega f d\nu = \int\limits_\Omega hf d\mu, \quad (1)$$

причем носитель h равен единице.

Ясно, что пространство

$$L_{\log}(\nabla_{\nu})=\{f\in L_0(\nabla):\int_{\Omega}\log(1+|f|)d\nu<+\infty\}=$$
$$=\{f\in L_0(\nabla):\int_{\Omega}h\cdot\log(1+|f|)d\mu<+\infty\}=L^{\nu}_{\log}(\nabla_{\mu})$$

имеет F-норму
$$\|f\|_{\log,\nu}=\int_{\Omega}\log(1+|f|)d\nu=\int_{\Omega}h(\log(1+|f|))d\mu:=\|f\|^{\nu}_{log,\mu}.$$

Утверждение 2. Пусть $\mu(\Omega)=1$ и имеет место равенство (1). Пространства $(L_{\log}(\nabla_{\nu}),\|f\|_{\log,\nu})$ и $(L_{\log}(\nabla_{k\mu}),\|f\|_{\log,k\mu})$ изометричны тогда и только тогда, когда $\int_{\Omega}hd\mu=k$.

Это утверждение следует из теоремы 1, т.к. $\nu(\Omega)=\int_{\Omega}d\nu=\int_{\Omega}hd\mu=k=k\mu(\Omega)$.

Нам понадобится также следующий аналог пространства log-интегрируемых измеримых функций
$$L^{(\nu)}_{log}(\nabla_{\mu})=\{f\in L_0(\nabla):\int_{\Omega}\log(1+h|f|)d\mu<+\infty\}$$

Это пространство будет F-пространством относительно F-нормы $\|f\|^{(\nu)}_{log,\mu}=\int_{\Omega}(\log(1+h|f|))d\mu$.

Это следует из следующего

Утверждение 3.

Функция $\|f\|^{(\nu)}_{log,\mu}$ заданная на $L^{(\nu)}_{log}(\nabla_{\mu})$ удовлетворяет следующим условиям:

(i). $\|f\|^{(\nu)}_{\log,\mu}>0$ для всех $0\neq f\in L^{(\nu)}_{log}(\nabla_{\mu})$

(ii). $\|\alpha f\|^{(\nu)}_{\log,\mu}\leq\|f\|^{(\nu)}_{\log,\mu}$ для любых $f\in L^{(\nu)}_{log}(\nabla_{\mu})$ и действительных чисел α, $|\alpha|\leq 1$;

(iii). $\lim_{\alpha\to 0}\|\alpha f\|^{(\nu)}_{\log,\mu}=0$ для всех $f\in L^{(\nu)}_{log}(\nabla_{\mu})$;

(iv). $\|f+g\|^{(\nu)}_{\log,\mu}=\|f\|^{(\nu)}_{\log,\mu}+\|g\|^{(\nu)}_{\log,\mu}$ для всех $f,g\in L^{(\nu)}_{log}(\nabla_{\mu})$.

Напомним пространства интегрируемых с p-той степенью функций
$$L_p(\nabla_{\mu})=\{f\in L_0(\nabla):\int_{\Omega}|f|^p d\mu<+\infty\},\ \|f\|_{p,\mu}=\left(\int_{\Omega}|f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

L_p-пространства, построенные по строго положительным мерам всегда изометричны. Покажем, как задается эта изометрия. Для этого введем $L_p(\nabla_\nu)$ следующим образом

$$L_p(\nabla_\nu) = \{ f \in L_0(\nabla) : \int_\Omega |f|^p \, d\nu = \int_\Omega h|f|^p \, d\mu < +\infty \},$$

$$\| f \|_{p,\nu} = \left(\int_\Omega |f|^p \, d\nu \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_\Omega h|f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Для любых $\mu, \nu \in M(\nabla)$ отображение $U : L_p(\nabla_\mu) \mapsto L_p(\nabla_\nu)$, определяемое равенством $U(f) = h^{-1} f,\ f \in L_p(\nabla_\mu)$ есть линейная сюръективная изометрия из $L_p(\nabla_\mu)$ на $L_p(\nabla_\nu)$. Аналогично для пространств $L_{\log}(\nabla_\mu)$ и $L_{\log}^{(\nu)}(\nabla_\mu)$ имеем.

Теорема 2. Для любых эквивалентных конечных мер μ и ν пространства $L_{\log}(\nabla_\mu)$ и $L_{\log}^{(\nu)}(\nabla_\mu)$ изометричны.

Доказательство. Действительно, для мер μ и ν отображение $U : L_{\log}(\nabla_\mu) \to L_{\log}^{(\nu)}(\nabla_\mu)$ определяемое равенством $U(f) = h^{-1} f,\ f \in L_{\log}(\nabla_\mu)$ есть линейная сюръективная изометрия из $L_{\log}(\nabla_\mu)$ и $L_{\log}^{(\nu)}(\nabla_\mu)$. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Dykema K., Sukochev F., Zanin D. Algebras of log-integrable functions and operators, Journal, Complex Anal. Oper. Theory 10, (8), (2016), pp. 1775–1787.

2. Abdullaev R.Z., Chilin V. Isomorphic Classification of *-Algebras of log-Integrable Measurable Functions.Algebra, Complex Analysis, and Pluripotential Theory. USUZCAMP 2017. Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, 264, pp.73-83. Springer, Cham.

3. Abdullaev R., Chilin V., Madaminov B. Isometric F-spaces of log-integrable function. Siberian Electronic Mathematical Reports. том 17, pp. 218-226(2020).

4. Duren P.L., Theory of H^p spaces, Pure and Applied Mathematics, Vol. 38, Academic Press, New York-London, 1970.

5. Vladimirov D.A. Boolean Algebras in Analysis. Mathematics and its Applications, 540, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (2002).