TEYLOR FORMULASIDA ISHLASHGA QIYNALYAPSZMI? ENDI BUNING OSON YECHIMI BOR.

Toxirov Abror Axrorovich
Andijonovdavlat pedagogika inututining Matematika va informatika fan o`qtuvchisi
Alijonov Shohruhbek Akramjon o`g`li
Andijonovdavlat pedagogika inututining Matematika va informatika yo`nalishi 1- bosqich talabasi
Shermuhammedova Madina Izzatbek qizi
Andijonovdavlat pedagogika inututining Matematika va informatika yo`nalishi 1- bosqich talabasi
Rahimova Gulshoda Baxodirjon qizi
Andijonovdavlat pedagogika inututining Matematika va informatika yo`nalishi 1- bosqich talabasi

Annotatsiya: *Ushbu maqola o'qituvchi va o'quvchilarga metodik tavsiya sifatida yozilgan. Matematikaning asosiy bo'limlaridan biri Teylor formulasi haqida ma'lumot beriladi.O'quvchi bu mavzuni o'rganish natijasida Teylor formulasi mavzusiga qiziqishi ortadi. Biz ushbu maqolada shu Makloren formulasi ko'rib chiqdik va shu mavzu yuzasidan misollar ham ko'rsatishga harakat qildik. Teylor formulasi oid dars jarayonida o'qituvchi maqoladan ko'rgazma sifatida foydalansa bo'ladi. Maqola matematikani o'qitish samaradorligini oshirishda xizmat qiladi. Bu maqolamiz sizlarga manzur bo'ladi degan umiddamiz.*

Kalit so'zlar: *Teylor formulasi, Teylor ko`phadi, Peano, nuqtada differensiallanuvchi, tengliklar, Koshi ko`rinishidagi qoldiq hadi, Makloren formulasi.*

Teylor formulasi matematik analizning eng muhim formulalaridan biri bo`lib, ko`plab nazariy tatbiqlarga ega. U taqribiy hisobning negizini tashkil qiladi.

Teylor ko`phadi. Peano ko`rinishdagi qoldiq hadli Teylor formulasi. Ma`lumki, funksiyaning qiymatlarini hisoblash ma`nosida ko`phadlar eng sodda funksiyalar hisoblanadi. Shu sababli funksiyaning $x_0$ nuqtadagi qiymatini hisoblash uchun uni shu nuqta atrofida ko`phad bilan almashtirish muammosi paydo bo`ladi.

Nuqtada differensiallanuvchi funksiya ta`rifiga ko`ra agar $y=f(x)$ funksiya x_0 nuqtada differensiallanuvchi bo`lsa, u holda uning shu nuqtadagi orttirmasini $\Delta f(x_0)=f`(x_0)\Delta x+o(\Delta x)$, ya`ni

$f(x)=f(x_0)+f`(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)$

ko`rinishda yozish mumkin.

Boshqacha aytganda x_0 nuqtada differensiallanuvchi $y=f(x)$ funksiya uchun birinchi darajali

$P_1(x)=f(x_0)+b_1(x-x_0)$ (1)

ko`phad mavjud bo`lib, $x\to x_0$ da $f(x)=P_1(x)+o(x-x_0)$ bo`ladi. Shuningdek, bu ko`phad $P_1(x_0)=f(x_0)$, $P_1`(x_0)=b=f`(x_0)$ shartlarni ham qanoatlantiradi.

Endi umumiyroq masalani qaraylik. Agar $x=x_0$ nuqtaning biror atrofida aniqlangan $y=f(x)$ funksiya shu nuqtada $f`(x)$, $f``(x)$, ..., $f^{(n)}(x)$ hosilalarga ega bo`lsa, u holda

$f(x)=P_n(x)+o(x-x_0)$ (2)

shartni qanoatlantiradigan darajasi n dan katta bo`lmagan $P_n(x)$ ko`phad mavjudmi?

Bunday ko`phadni

$P_n(x)=b_0+b_1(x-x_0)+b_2(x-x_0)^2+ \dots +b_n(x-x_0)^n$, (3)

ko`rinishda izlaymiz. Noma`lum bo`lgan $b_0, b_1, b_2, \dots, b_n$ koeffitsientlarni topishda

$P_n(x_0)=f(x_0)$, $P_n`(x_0)=f`(x_0)$, $P_n``(x_0)=f``(x_0)$, ..., $P_n^{(n)}(x_0)=f^{(n)}(x_0)$ (4)

shartlardan foydalanamiz. Avval $P_n(x)$ ko`phadning hosilalarini topamiz:

$P_n`(x)=b_1+2b_2(x-x_0)+3b_3(x-x_0)^2+ \dots +nb_n(x-x_0)^{n-1}$,

$P_n``(x)=2\cdot 1b_2+3\cdot 2b_3(x-x_0)+ \dots +n\cdot(n-1)b_n(x-x_0)^{n-2}$,

$P_n```(x)=3\cdot 2\cdot 1b_3+ \dots +n\cdot(n-1)\cdot(n-2)b_n(x-x_0)^{n-3}$,

. . . . ,

$P_n^{(n)}(x)=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1b_n$.

Yuqorida olingan tengliklar va (3) tenglikning har ikkala tomoniga x o`rniga $x_0$ ni qo`yib barcha $b_0, b_1, b_2, \dots, b_n$ koeffitsientlar qiymatlarini topamiz:

$P_n(x_0)=f(x_0)=b_0$,

$P_n`(x_0)=f`(x_0)=b_1$,

$P_n``(x_0)=f``(x_0)=2\cdot 1b_2=2!b_2$,

. . . .

$P_n^{(n)}(x_0)=f^{(n)}(x_0)=n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1b_n=n!b_n$

Bulardan $b_0=f(x_0)$, $b_1=f`(x_0)$, $b_2=\frac{1}{2!}f``(x_0)$, . . ., $b_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)$ hosil qilamiz. Topilgan natijalarni (3.3) qo`yamiz va

$P_n(x)= f(x_0)+ f`(x_0)(x-x_0)+ \frac{1}{2!}f``(x_0)(x-x_0)^2+ \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$, (5)

ko`rinishda ko`phadni hosil qilamiz. Bu ko`phad Teylor ko`phadi deb ataladi.

Teylor ko`phadi (2) shartni qanoatlantirishini isbotlaymiz. Funksiya va Teylor ko`phadi ayirmasini $R_n(x)$ orqali belgilaymiz: $R_n(x)=f(x)-P_n(x)$. (4) shartlardan $R_n(x_0)=R_n`(x_0)=\ldots= R_n^{(n)}(x_0)=0$ bo`lishi kelib chiqadi.

Endi $R_n(x)=o((x-x_0)^n)$, ya`ni $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}=0$ ekanligini ko`rsatamiz. Agar $x\to x_0$ bo`lsa, $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}$ ifodaning 0/0 tipidagi aniqmaslik ekanligini ko`rish qiyin emas. Unga Lopital qoidasini n marta tatbiq qilamiz. U holda

$$\lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}=\lim_{x\to x_0}\frac{R_n'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}}=\ldots=\lim_{x\to x_0}\frac{R_n^{(n-1)}(x)}{n!(x-x_0)}=$$

$=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{R_n^{(n)}(x)}{n!}=\frac{R_n^{(n)}(x_0)}{n!}=0$, demak $x\to x_0$ da $R_n(x)=o((x-x_0)^n)$ o`rinli ekan.

Shunday qilib, quyidagi teorema isbotlandi:

Teorema. Agar $y=f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning biror atrofida n marta differensiallanuvchi bo`lsa, u holda $x\to x_0$ da quyidagi formula

$f(x)= f(x_0)+ f`(x_0)(x-x_0)+ \frac{1}{2!}f``(x_0)(x-x_0)^2+ \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)$ (3.6)

o`rinli bo`ladi, bu yerda $R_n(x)=o((x-x_0)^n)$ Peano ko`rinishidagi qoldiq had.

Agar (3.6) formulada $x_0=0$ deb olsak, Teylor formulasining xususiy holi hosil bo`ladi:

$$f(x)=f(0)+f`(0)x+\frac{1}{2!}f``(0)x^2+\ldots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n+o(x^n). \quad (7)$$

Bu formula Makloren formulasi deb ataladi.

Teylor formulasining Lagranj ko`rinishdagi qoldiq hadi. Teylor formulasi $R_n(x)$ qoldiq hadi yozilishining turli ko`rinishlari mavjud. Biz uning Lagranj ko`rinishi bilan tanishamiz.

Qaralayotgan f(x) funksiya x_0 nuqta atrofida n+1 –tartibli hosilaga ega bo`lsin deb talab qilamiz va yangi $g(x)=(x-x_0)^{n+1}$ funksiyani kiritamiz. Ravshanki,

$$g(x_0)=g`(x_0)=\ldots=g^{(n)}(x_0)=0;\ g^{(n+1)}(x_0)=(n+1)!\neq 0.$$

Ushbu $R_n(x)=f(x)-P_n(x)$ va $g(x)=(x-x_0)^{n+1}$ funksiyalarga Koshi teoremasini tatbiq qilamiz. Bunda $R_n(x_0)=R_n`(x_0)=\ldots=R_n^{(n)}(x_0)=0$ e`tiborga olib, quyidagini topamiz:

$$\frac{R_n(x)}{g(x)}=\frac{R_n(x)-R_n(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\frac{R_n'(c_1)}{g(c_1)}=\frac{R_n'(c_1)-R_n'(x_0)}{g'(c_1)-g'(x_0)}=\frac{R_n''(c_2)}{g''(c_2)}=\ldots=$$

$$\frac{R_n^{(n)}(c_n)}{g^{(n)}(c_n)}=\frac{R_n^{(n)}(x)-R_n^{(n)}(x_0)}{g^{(n)}(x)-g^{(n)}(x_0)}=\frac{R_n^{(n+1)}(\xi)}{g^{(n+1)}(\xi)},$$

bu yerda $c_1\in(x_0;x)$; $c_2\in(x_0;c_1)$; ... ; $c_n\in(x_0;c_{n-1})$; $\xi\in(x_0;c_n)\subset(x_0;x)$.

Shunday qilib, biz $\frac{R_n(x)}{g(x)}=\frac{R_n^{(n+1)}(\xi)}{g^{(n+1)}(\xi)}$ ekanligini ko`rsatdik, bu yerda $\xi\in(x_0;x)$. Endi $g(x)=(x-x_0)^{n+1}$, $g^{(n+1)}(\xi)=(n+1)!$, $R_n^{(n+1)}(\xi)=f^{(n+1)}(\xi)$ ekanligini e`tiborga olsak quyidagi formulaga ega bo`lamiz:

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},\ \xi\in(x_0;x). \quad (8)$$

Bu (3.8) formulani Teylor formulasining Lagranj ko`rinishidagi qoldiq hadi deb ataladi.

Lagranj ko`rinishdagi qoldiq hadni

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \quad (9)$$

ko`rinishda ham yozish mumkin, bu yerda θ birdan kichik bo`lgan musbat son, ya`ni $0<\theta<1$.

Shunday qilib, f(x) funksiyaning Lagranj ko`rinishidagi qoldiq hadli Teylor formulasi kuyidagi shaklda yoziladi:

$$f(x)=f(x_0)+f`(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f``(x_0)(x-x_0)^2+\ldots$$

$$+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},\ \text{bu yerda } \xi\in(x_0;x).$$

Agar $x_0=0$ bo`lsa, u holda $\xi=x_0+\theta(x-x_0)=\theta x$, bu yerda $0<\theta<1$, bo`lishi ravshan, shu sababli Lagranj ko`rinishidagi qoldiq hadli Makloren formulasi

$$f(x)=f(0)+f`(0)x+\frac{1}{2!}f``(0)x^2+\ldots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} \quad (10)$$

shaklida yoziladi.

Teylor formulasining Koshi ko`rinishidagi qoldiq hadi. Teylor formulasi qoldiq hadining boshqa ko`rinishlariga misol tariqasida Koshi ko`rinishidagi qoldiq hadni keltirish mumkin. Buning uchun

$$\varphi(t) = f(x) - f(t) - f'(t)(x-t) - \ldots - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n$$

yordamchi funksiyani tuzib olamiz va $[x_0;x]$ segmentda uzluksiz, $(x_0;x)$ intervalda esa noldan farqli chekli hosilaga ega bo`lgan biror $\psi(t)$ funksiyani olib, bu funksiyalarga Koshi teoremasini qo`llasak,

$$R_n(x) = \frac{\psi(x) - \psi(x_0)}{\psi'(c)} \cdot \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n, \quad c \in (x_0; x) \qquad (11)$$

ko`rinishdagi qoldiq hadni chiqarish mumkin.

Agar (3.11) formulada $\psi(t)$ funksiya sifatida $\psi(t)=x-t$ funksiya olinsa, natijada Koshi shaklidagi qoldiq hadni hosil qilamiz:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(1-\theta)^n (x-x_0)^{n+1}, \quad c = x_0 + \theta(x-x_0), \quad 0 < \theta < 1$$

ADABIYOTLAR:

1. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. 2-nashri, 1-ч.-М, “Наука”, 1976.

2. Xudoyberganov G., Vorisov A., Mansurov X. Kompleks analiz. (ma’ruzalar). T, “Universitet”,1998.

3. Sadullaev A., Xudoybergangov G., Mansurov X., Vorisov A., Tuychiev T. Matematik analiz kursidan misol va masalalar to’plami. 3-qism (kompleks analiz) “O’zbekiston”,2000.

4. Волковыский Л.И., Лунц Г.Л., Араманович И.Г. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. 3- nashri. – М. “Наука”, 1975.