ANIQMASLIKLARNI OCHISH. (LOPITAL QOIDALAR)

Toxirov Abror Axrorovich
Andijonovdavlat pedagogika inututining Matematika va informatika fan o`qtuvchisi
Alijonov SHohruhbek Akramjon o`g`li
Andijonovdavlat pedagogika inututining Matematika va informatika yo`nalishi 1- bosqich talabasi
Shukurova SHodiyabegim Bekmurod qizi
Andijonovdavlat pedagogika inututining Matematika va informatika yo`nalishi 1- bosqich talabasi
Xamdamkulova Muslima Umidjon qizi
Andijonovdavlat pedagogika inututining Matematika va informatika yo`nalishi 1- bosqich talabasi

Annotatsiya: *Ushbu maqolada Aniqmasliklarni ochish va Lopital qoidalar o`rganish va uni hayotga tadbiq qilishda , lopital qoidalar haqida yangi elementlarga ega bo`lishga ushbu maqola yordam beradi.*

Kalit so'zlar: *Lopital qoidalar, funksiyalar, limitlar, Koshi teoremasi, teorema, isbot.*

Tegishli funksiyalarning hosilalari mavjud bo`lganda $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ , $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, $1^{\infty}$, $0^{0}$, $\infty^{0}$ ko`rinishdagi aniqmasliklarni ochish masalasi engillashadi. Odatda hosilalardan foydalanib, aniqmasliklarni ochish Lopital qoidalari deb ataladi. Biz quyida Lopital qoidalarining bayoni bilan shug`ullanamiz.

1. $\frac{0}{0}$ ko`rinishdagi aniqmaslik. Ma`lumki, $x\to 0$ da $f(x)\to 0$ va $g(x)\to 0$ bo`lsa, $\frac{f(x)}{g(x)}$ nisbat $\frac{0}{0}$ ko`rinishdagi aniqmaslikni ifodalaydi. Ko`pincha $x\to a$ da $\frac{f(x)}{g(x)}$ nisbatning limitini topishga qaraganda $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ nisbatning limitini topish oson bo`ladi. Bu nisbatlar limitlarining teng bo`lish sharti quyidagi teoremada ifodalangan.

1-teorema. Agar

1) $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $(a-\delta;a)\cup(a;a+\delta)$, bu yerda $\delta>0$, to`plamda uzluksiz, differensiallanuvchi va shu to`plamdan olingan ixtiyoriy x uchun $g(x)\neq 0$, $g`(x)\neq 0$;

2) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$;

3) hosilalar nisbatining limiti (chekli yoki cheksiz)

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$$

mavjud bo`lsa, u holda funksiyalar nisbatining limiti $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ mavjud va

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} \qquad (2.1)$$

tenglik o`rinli bo`ladi.

Isbot. Har ikkala funksiyani x=a nuqtada f(a)=0, g(a)=0 deb aniqlasak, natijada ikkinchi shartga ko`ra $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0=f(a)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0=g(a)$ tengliklar o`rinli bo`lib, f(x) va g(x) funksiyalar x=a nuqtada uzluksiz bo`ladi.

Avval x>a holni qaraymiz. Berilgan f(x) va g(x) funksiyalar [a;x], bu yerda x<a+δ, kesmada Koshi teoremasining shartlarini qanoatlantiradi. Shuning uchun a bilan x orasida shunday c nuqta topiladiki, ushbu $\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$ tenglik o`rinli bo`ladi. f(a)=g(a)=0 ekanligini e`tiborga olsak, so`ngi tenglikdan

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(c)}{g'(c)} \qquad (2.2)$$

bo`lishi kelib chiqadi. Ravshanki, a<c<x bo`lganligi sababli, x→a bo`lganda c→a bo`ladi. Teoremaning 3-sharti va (2.2) tenglikdan $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$=A kelib chiqadi.

Shunga o`xshash, x<a holni ham qaraladi. Teorema isbot bo`ldi.

Misol. Ushbu $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\ln(x^2-3)}{x^2+3x-10}$ limitni xisoblang.

Yechish. Bu holda $f(x)=\ln(x^2-3)$, $g(x)=x^2+3x-10$ bo`lib, ular uchun 1-teoremaning barcha shartlari bajariladi.

Haqiqatan ham,

1) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\ln(x^2-3)=\ln 1=0$, $\lim\limits_{x\to 2} g(x)=\lim\limits_{x\to 2}(x^2+3x-10)=0$;

2) $f'(x)=\frac{2x}{x^2-3}$, $g'(x)=2x+3$, $x\neq\pm\sqrt{3}$;

3) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x}{(x^2-3)(2x+3)}=0$ bo`ladi.

Demak, 1-teoremaga binoan $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\ln\left(x^2-3\right)}{x^2+3x-10}=0$.

1-eslatma. Shuni ta`kidlash kerakki, berilgan funksiyalar nisbatining limiti 3) shart bajarilmasa ham mavjud bo`lishi mumkin, ya`ni 3) shart yetarli bo`lib, zaruriy emas.

Masalan, $f(x)=õ^2\cos\frac{1}{x}$, $g(x)=x$ funksiyalar (0;1] da 1), 2) shartlarni qanoatlantiradi va $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 0}(x\sin\frac{1}{x})=0$, lekin

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to 0}(2x\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x})$ mavjud emas, chunki $x_n=\frac{1}{\pi n}\to 0$ n→∞ da

$$\lim_{x_n\to 0}(2x\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x})=\lim_{n\to\infty}(\frac{2(-1)^{n+1}}{\pi n}+\sin\pi n)=0,$$

$x_n=\frac{1}{\pi(2n+\frac{1}{2})}\to 0$ n→∞ da esa

$$\lim_{x_n\to 0}(2x\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x})=\lim_{n\to\infty}(\frac{2}{\pi(2n+\frac{1}{2})}\cdot ños(2\pi n+\frac{\pi}{2})+\sin(2\pi n+\frac{\pi}{2}))=1.$$

2-teorema. Agar $[c;+\infty)$ nurda aniqlangan f(x) va g(x) funksiyalar berilgan bo`lib,

1) $(c;+\infty)$ da chekli f`(x) va g`(x) hosilalar mavjud va g`(x)≠0,

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0,\quad \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$;

3) hosilalar nisbatining limiti $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ (chekli yoki cheksiz) mavjud bo`lsa, u holda funksiyalar nisbatining limiti $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ mavjud va

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} \qquad (2.3)$$

tenglik o`rinli bo`ladi.

Isbot. Umumiylikni saqlagan holda, teoremadagi c sonni musbat deb olish mumkin. Quyidagi $\tilde{o}=\frac{1}{t}$ formula yordamida x o`zgaruvchini t o`zgaruvchiga almashtiramiz. U holda x→+∞ da t→0 bo`ladi. Natijada f(x) va g(x) funksiyalar t o`zgaruvchising $f\left(\frac{1}{t}\right)$ va $g\left(\frac{1}{t}\right)$ funksiyalari bo`lib, ular $(0,\ \frac{1}{c}]$ da aniqlangan. Teoremadagi (2) shartga asosan

$\lim\limits_{t\to+0} f(\frac{1}{t})=0,\quad \lim\limits_{t\to+0} g(\frac{1}{t})=0$ bo`ladi.

Ushbu,

$$\lim_{t\to+0} f(\frac{1}{t})=0,\quad \lim_{t\to+0} g(\frac{1}{t})=0$$

munosabatlardan $(0;\frac{1}{c})$ intervalda $f_t'(\frac{1}{t}),\ g_t'(\frac{1}{t})$ hosilalarning mavjudligi kelib chiqadi. So`ngra teoremaning 3) shartiga ko`ra

$$\lim_{t\to+0}\frac{f_t'(\frac{1}{t})}{g_t'(\frac{1}{t})}=\lim_{t\to+0}\frac{-f_x'\cdot(\frac{1}{t^2})}{-g_t'\cdot(\frac{1}{t^2})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Demak $f\left(\frac{1}{t}\right)$ va $g\left(\frac{1}{t}\right)$ funksiyalarga 1-teoremani qo`llash mumkin. Bunda $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{t\to+0}\frac{f(\frac{1}{t})}{g(\frac{1}{t})}$ e`tiborga olsak, (2.3) tenglikning o`rinliligi kelib chiqadi. Teorema isbot bo`ldi.

2. $\frac{\infty}{\infty}$ ko`rinishdagi aniqmaslik. Agar x→a da f(x)→∞, g(x)→∞ bo`lsa, $\frac{f(x)}{g(x)}$ nisbat $\frac{\infty}{\infty}$ ko`rinishidagi aniqmaslikni ifodalaydi. Endi bunday aniqmaslikni ochishda ham f(x)

va g(x) funksiyalarning hosilalaridan foydalanish mumkinligini ko`rsatadigan teoremani keltiramiz.

3-teorema. Agar

1) f(x) va g(x) funksiyalar $(a;\infty)$ nurda differensiallanuvchi, hamda $g`(x)\neq 0$,

2) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=\infty$,

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ mavjud bo`lsa,

u holda $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ mavjud va $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ bo`ladi.

Isbot. Teorema shartiga ko`ra $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ mavjud. Aytaylik $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\mu$ bo`lsin. U holda $\forall\varepsilon>0$ sonni olsak ham shunday N>0 son topilib, x≥N bo`lganda

$$\mu-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{f'(x)}{g'(x)}<\mu+\frac{\varepsilon}{2} \qquad (2.3)$$

tengsizliklar bajariladi. Umumiylikni cheklamagan holda N>a deb olishimiz mumkin. U holda x≥N tengsizlikdan $x\in(a;\infty)$ kelib chiqadi.

Aytaylik x>N bo`lsin. U holda [N;x] kesmada f(x) va g(x) funksiyalarga Koshi teoremasini qo`llanib quyidagiga ega bo`lamiz:

$\frac{f(x)-f(N)}{g(x)-g(N)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$, bu yerda N<c<x.

Endi c>N bo`lganligi sababli x=c da (2.3) tengsizliklar o`rinli:

$$\mu-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{f'(ñ)}{g'(ñ)}<\mu+\frac{\varepsilon}{2},$$

bundan esa

$$\mu-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{f(x)-f(N)}{g(x)-g(N)}<\mu+\frac{\varepsilon}{2}$$

tengsizliklarga ega bo`lamiz.

Teorema shartiga ko`ra $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=\infty$, f(N) va g(N) lar esa chekli sonlar. Shu sababli x ning yetarlicha katta qiymatlarida $\frac{f(x)-f(N)}{g(x)-g(N)}$ kasr $\frac{f(x)}{g(x)}$ kasrdan istalgancha kam farq qiladi. U holda shunday M soni topilib, x≥M larda

$$\mu-\varepsilon<\frac{f(x)}{g(x)}<\mu+\varepsilon \qquad (2.4)$$

tengsizlik o`rinli bo`ladi.

Shunday qilib, ixtiyoriy ε>0 son uchun shunday M soni mavjudki, barcha x≥M larda (2.4) tenglik o`rinli bo`ladi, bu esa $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\mu$ ekanligini anglatadi. Teorema isbot bo`ldi.

Yuqorida isbotlangan teorema x→a (a-son) holda ham o`rinli. Buni isbotlash uchun t= $\frac{1}{õ-à}$ almashtirish bajarish yetarli.

Misol. Ushbu $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}$ limitni hisoblang.

Yechish. f(x)=lnx, g(x)=x funksiyalar uchun 3-teorema shartlarini tekshiramiz: 1) bu funksiyalar (0,+∞) da differensiallanuvchi; 2) f`(x)=1/x g`(x)=1; 3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1/õ}{1}$ =0, ya`ni mavjud. Demak, izlanayotgan limit ham mavjud va $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}$ =0 tenglik o`rinli.

3. Boshqa ko`rinishdagi aniqmasliklar. Ma`lumki, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0,\ \ \lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty,$ bo`lganda f(x)·g(x) ifoda 0·∞ ko`rinishidagi aniqmaslik bo`lib, uning quyidagi

$$f(x)\cdot g(x)=\frac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}}=\frac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}$$

kabi yozish orqali $\dfrac{0}{0}$ yoki $\dfrac{\infty}{\infty}$ ko`rinishidagi aniqmaslikka keltirish mumkin. Shuningdek, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty,\ \ \lim\limits_{x\to a} g(x)=+\infty,$ bo`lganda f(x)-g(x) ifoda ∞-∞ ko`rinishidagi aniqmaslik bo`lib, uni ham quyidacha shakl almashtirib

$$f(x)-g(x)=\frac{\dfrac{1}{g(x)}-\dfrac{1}{f(x)}}{\dfrac{1}{f(x)}\cdot\dfrac{1}{g(x)}}$$

$\dfrac{0}{0}$ ko`rinishdagi aniqmaslikka keltirish mumkin.

Ma`lumki, x→a da f(x) funksiya 1, 0 va ∞ ga, g(x) funksiya esa mos ravshda ∞, 0 va 0 intilganda $(f(x))^{g(x)}$ darajali-ko`rsatkichli ifoda 1^{∞}, 0^0, ∞^0 ko`rinishidagi aniqmasliklar edi. Bu ko`rinishdagi aniqmasliklarni ochish uchun avval $y=(f(x))^{g(x)}$ ni logarifmlaymiz: lny= g(x)·ln(f(x)). Bunda x→a da g(x)ln(f(x)) ifoda 0·∞ ko`rinishdagi aniqmaslikni ifodalaydi.

Shunday qilib, funksiya hosilalari yordamida 0·∞, ∞-∞, 1^{∞}, 0^0, ∞^0, ko`rinishdagi aniqmasliklarni ochiщda, ularni $\dfrac{0}{0}$ yoki $\dfrac{\infty}{\infty}$ ko`rinishidagi aniqmaslikka keltirib, so`ng yuqoridagi teoremalar qo`llaniladi.

2-eslatma. Agar f(x) va g(x) funksiyalarning f`(x) va g`(x) hosilalari ham f(x) va g(x) lar singari yuqorida keltirilgan teoremalarning barcha shartlarini qanoatlantirsa, u holda

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}$$

tengliklar o`rinli bo`ladi, ya`ni bu holda Lopital qoidasini takror qo`llanish mumkin bo`ladi.

Misol. Ushbu $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{tgx}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ limitni hisoblang.

Yechish. Ravshanki, x→0 da $\left(\frac{tgx}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ ifoda 1^∞ ko`rinishdagi aniqmaslik bo`ladi. Uni logarifmlab, $\frac{0}{0}$ aniqmaslikni ochishga keltiramiz:

Demak, $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{tgx}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{e}$.

ADABIYOTLAR:

1. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. 2-nashri, 1-ч.-М, “Наука”, 1976.
2. Xudoyberganov G., Vorisov A., Mansurov X. Kompleks analiz. (ma’ruzalar). T, “Universitet”,1998.
3. Sadullaev A., Xudoybergangov G., Mansurov X., Vorisov A., Tuychiev T. Matematik analiz kursidan misol va masalalar to’plami. 3-qism (kompleks analiz) “O’zbekiston”,2000.
4. Волковыский Л.И., Лунц Г.Л., Араманович И.Г. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. 3- nashri. – М. “Наука”, 1975.