SOBOLEVNI JOYLASHTIRISH TEOREMALARINING AYRIMALI ANALOGLARI VA ULARNING TATBIQLARI

Karimov Shaxobiddin Tuychiboyevich
Farg`ona davlat universiteti, amaliy matematika va informatika kafedrasi dotsenti,
Jahongirova Jayrona Jo'rabek qizi
Farg`ona Davlat Universiteti IV bosqich bakalavriatning "Amaliy matematikla va informatika" yunalishi talabasi

Annotatsiya: *Mazkur maqolada Gilbert fazolaridan biri bo'lgan Sobolev fazosi haqida asosiy tushunchalar va ma`lumotlar berilib, undagi joylashtirish teoremalarining ayrimali analoglari va tatbiqlari berilgan.*

Kalit so'zlar: *Maksimum prinspi, Grin formulalari, Sobolev fazosi, joylashtirish teoremalari, Qismiy yig`ish formulalari, Ko`paytmaning ayrimali differensiallash, Gilbert fazosi.*

KIRISH

Hisoblash usullari zamonaviy matematikaning ajralmas bir qismi xisoblanadi. Hisoblash usullari ko'pgina amaliyoy masalalarini yechishda, ayniqsa, modellarni differensial tenglamalar terminida ifodalanadigan jarayon, jarayonlarni tanqid qilishning ajralmas qismi ekanligi ma'lum. Bunday modellarni samarali tadbiq qilish u yoki bu hisoblash algoritmlarini tanlash va kompyuterda dasturlash usullari bilan bevosita bog'liq.

IX asrda yashagan buyuk o'zbek matematik olimi Muhammad ibn Muso al – Xorazmiy hisoblash matematika fanini yaratishga katta hissa qo'shgan. Chet el olimlaridan Nyuton, Eyler, Lobachevsky, Gauss kabilar ham bu fanni yaratishga ulkan hissa qo'shganlar. Matematikada tipik matematik masalalarining yechimlarni yetarlicha aniqlikda hisoblash imkonini beruvchi metodlar yaratishga va shu maqsadda hozirgi zamon hisoblash vositalaridan foydalanish yo'llarini ishlab chiqishga bag'ishlangan soha hisoblash matematikasi deyiladi. Fanning maqsadi funksional fazolarda to'plamlarni va ularda aniqlangan operatorlarni yaqinlashtirish hamda hozirgi zamon hisoblash mashinalari qo'llanadigan sharoitda masalalarni yechish uchun oqilona va tejashlar algoritm va metodlar ishlab chiqishdan iborat.

TADQIQOT METODOLOGIYASI

Mazkur tadqiqotni yoritishda olimlar, tadqiqotchilar va muhandislarning mavzu doirasida olib borgan ilmiy ishlari, yaratgan o'quv adabiyotlari tizimli o'rganilgan. Ularning xulosa va fikrlari qiyosiy tahlil etilib, ma'lumotlarni qayta ishlandi.

TAHLIL VA NATIJALAR

1.Ko`paytmaning ayrimali differensiallash formulalari. Differensial hisob kursidan bizga quydagi formula ma'lum:

$$(uv)` = u`v + v`u.$$

To`r funksiyalar uchun chap va o`ng ayrimali hosilalar tushunchasi kiritilgan edi. Bunga ko`ra chekli ayrimali sxemalar nazariyasidan ko`paytmaning chap va o`ng ayrimali differensiallash formulalarini hosil qilamiz:

$$(uv)_x = u_x v + u^{(+1)} v_x = u_x v^{(+1)} + u v_x, \qquad (1)$$

$$(uv)_{\bar{x}} = u_x - v + v_x - u^{(-1)} = u_x - v^{(-1)} + u v_{\bar{x}}, \qquad (2)$$

bu yerda

$$f^{(\pm 1)} = f(x \pm h),\ f_x = \frac{f^{(+1)} - f}{h},\ f_{\bar{x}} = \frac{f - f^{(-1)}}{h}.$$

Bu formulalar bevosita isbotlanadi. (1) formulalarni isbotlaylik:

$$(uv)_x = \frac{u_{i+1} v_{i+1} - u_i v_i}{h} = \frac{u_{i+1} v_{i+1} - u_i v_{i+1}}{h} +$$

$$+ \frac{u_i v_{i+1} - u_i v_i}{h} = v_{i+1}\left(\frac{u_{i+1} - u_i}{h}\right) + u_i\left(\frac{v_{i+1} - v_i}{h}\right) =$$

$$= u_x v^{(+1)} + u v_{\bar{x}}.$$

**2. Qismiy yig`ish formulalari.** Integral hisob kursidan ma'lumki, bo`laklab integrallash formulasi

$$\int_0^1 uv`dx = uv\Big|_0^1 - \int_0^1 u`v dx$$

ko`rinishga ega. To`r funksiyalar uchun bu formulaning ikki xil analogini hosil qilishimiz mumkin:

$$(u, v_x) = u_N v_N - u_0 v_1 - (u_{\bar{x}}, v], \qquad (3)$$

$$(u, v_{\bar{x}}) = u_N v_{N-1} - u_0 v_0 - [u_x, v). \qquad (3`)$$

Bu yerda quydagi belgilardan foydalandik:

$$(u, v) = \sum_{i=1}^{N-1} u_i v_i h, (u, v] = \sum_{i=1}^{N} u_i v_i h$$

$$[u, v) = \sum_{i=0}^{N-1} u_i v_i h. \qquad (4)$$

Masalan, (3) nin isbotlaylik. (1) ga asosan

$$\sum_{i=1}^{N-1}(uv_x)_i h=\sum_{i=1}^{N-1}(uv)_{x,i}h-\sum_{i=1}^{N-1}(u_x v^{(+1)})_i=$$
$$=(uv)_N-(uv)_1-\sum_{i=2}^{N}(u_{\bar{x}}v)_i h=(uv)_N-u_1v_1- \tag{5}$$
$$-\sum_{i=1}^{N}u_{\bar{x},i}v_i h+(u_x v)_1 h,$$

Lekin $h(u_{\bar{x}}v)_1=u_1v_1-u_0v_1$ ekanligi ma'lum. Bu ifodani (5) ga qo`yib , (4) ni e'tiborga olsak, $(u,v_x)=u_Nv_N-u_0v_1-(u_{\bar{x}},v]$ hosil bo`ladi.

Notekis $\hat{\omega}$ to`r uchun esa bu formulalar birmuncha boshqacha ko`rinishga ega:

$$\left.\begin{aligned}
&(u,v)_*=\sum_{i=1}^{N-1}u_iv_ip_i,\ (u,v)=\sum_{i=1}^{N-1}u_iv_ih_{i+1}\\
&(u,v]=\sum_{i=1}^{N}u_iv_ih_i,\\
&(u,v_{\bar{x}})_*=u_Nv_N-u_0v_1-(v,u_{\bar{x}}],
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

bu yerda $p=0,5(h_i+h_{i+1})$.

3. Grinning birinchi ayrimali formulasi.

Odatda

$$\int_0^1 u(kv')'dx=-\int_0^1 ku'v'dx+kuv'\Big|_0^1$$

Tenglik Grinning *birinchi formulasi* deyiladi. Bu formulaning to`radagi analogini qismiy yig`ishformulalaridan foydalanib hosil qilishimiz mumkin. Agar (3) da $u=z, v=ay_{\bar{x}}$ desak, Grinning birinchi ayrimali formulasi kelib chiqadi:

$$(z,(ay_{\bar{x}}))_{\bar{x}}=-(ay_{\bar{x}},z_{\bar{x}}]+azy_{\bar{x}}\Big|_N-a_1y_{x,0}z_0. \tag{7}$$

$z_0=z_N=0$ bo`lganda $\wedge y=(ay_{\bar{x}})_x$ deb belgilab olsak, Grin formulasi quydagi ko`rinishga ega bo`ladi:

$$(z,\wedge y)=-(ay_{\bar{x}},z_{\bar{x}}].$$

Bu yerdan, xususiy holda $z=y$ bo`lsa,

$$(\wedge y, y) = -(a, y^2_{\bar{x}}], y_0 = y_N = 0.$$

Shunga o`xshash, notekis to`r uchun:

$$(z, (ay_{\bar{x}})_{\hat{x}})_* = -(ay_{\bar{x}}, z_{\bar{x}}] + azy_{\bar{x}}\big|_N - a_1 y_{x,0} z_0 .$$

4. Grinning ikkinchi ayrimali formulasi. Integral hisob kursidan ma'lumki, Grinning ikkinchi formulasi

$$\int_0^1 u(kv')'\,dx = -\int_0^1 ku'v'dx + kuv'\big|_0^1$$

Ko`rinishga ega. Bu formulaning ayrimali analogini hosil qilish uchun (3) da $u = y, v = az_{\bar{x}}$ desak, quydagi tenglikka ega bo`lamiz:

$$(y, (az_{\bar{x}})_x) = -(ay_{\bar{x}} z_{\bar{x}}] + ay\,z_{\bar{x}}\big|_N - a_1 y_0 z_{x,0}. \quad (8)$$

Notekis to`r uchunesa bu formulaning ko`rinishi quydagicha:

$$(z, (ay_{\bar{x}})_{\hat{x}})_* - (y, (az_{\bar{x}})_{\hat{x}})_* = a_N (zy_{\bar{x}} - yz_{\bar{x}})_N -$$
$$-a_1 (y_x z - z_x y)_0 .$$

5. Joylashtirish teoremalarining ayrimali analoglari. Ayrimali sxemalarning har xil xossalarinini baxolashda S. L. Sobolevning joylashtirish teoremalariga mos keladigan ayrim tengsizliklar kerak bo`ladi.

a) $\overline{\omega}_h = \{x_i = ih, 0 \le i \le N, x_0 = 0, x_N = 1\}$ *tekis to`r ustida aniqlangan va x=0, x=1 nuqtalarda nolga aylanadigan har qanday y(x) to`r funksiya uchun quydagi tengsizlik o`rinlidir:*

$$\|y\|c \le \frac{1}{2}\|y_{\bar{x}}\|, \quad (A)$$

bu yerda

$$\|y\|_c = \max_{x \in \overline{\omega} h} |y(x)|, \|y_{\bar{x}}| = \sqrt{(y_{\bar{x}}, y_{\bar{x}}]}$$

Isboti. *y(x)* funksiyani shu to`rda quydagicha ifodalash mumkin:

$$y^2(x) = (1-x)y^2(x) + xy^2(x). \quad (9)$$

yoki

$$y^2(x)=(\sum_{x'=x'+h}^{1} y_{\bar{x}}(x')h)^2.$$

Bu tengliklarni (9) ga qo`ysak, quydagi tenglik o`rinli bo`ladi;

$$y^2(x)=(1-x)\left(\sum_{x'=h}^{x} hy_{\bar{x}}(x')h\right)^2+x\left(\sum_{x'=x+h}^{1} hy_{\bar{x}}(x')\right)^2.$$

Bu tenglikning o`ng tomonini baholaylik, buning uchun

$$|(u,v)|\le\|u\|\|v\|$$

Koshi-Bunyakovskiy tengsizligidan foydalanamiz, u holda quydagi tengsizlikka ega bo`lamiz:

$$y^2(x)\le(1-x)\sum_{x'=h}^{x} h\sum_{x'=h}^{x} y^2_{\bar{x}}(x')h+x\sum_{x'=x+h}^{1} h\sum_{x'=x+h}^{1} y^2_{\bar{x}}(x')=$$

$$=x(1-x)\sum_{x'=h}^{x} y^2_{\bar{x}}(x')h=x(1-x)\|y_{\bar{x}}\|^2.$$

x(1-x) ifoda [0, 1] oraliqda o`zining maksimum qiymati $\frac{1}{4}$ ni $x=0.5$ nuqtada qabul qiladi.

Buni e'tiborga olsak, yuqoridagi tengsizlikdan

$$\|y(x)\|_c\le\frac{1}{2}\|y_{\bar{x}}\|$$

kelib chiqadi.

Agar $0\le x\le l$ bo`lib, $y(0)=y(l)=0$ bo`lsa, u holda

$$|y|\le\|y\|_C\le\frac{\sqrt{l}}{2}\|y_{\bar{x}}\|$$

tengsizlik o`rinli bo`ladi.

Umumiy holda, chegarada *y(x)* ning nolga tengligi talab qilinmasa, u holda

$$\|y\|^2{}_C\le 2(l\|y_{\bar{x}}\|^2+y^2{}_0),$$

$$\|y\|^2{}_C\le 2(l\|y_{\bar{x}}\|^2+y^2{}_N)$$

tengsizliklar o`rinlidir;

b) *ixtiyoriy notekis* $\overline{\omega}_h = \{x_i, x_0 = 0, x_N = l\}$ *to`r ustida aniqlangan va x=0, x=l nuqtalarda nolga aylanadigan har qanday y(x) funksiya uchun*

$$\|y\|^2 \le \frac{l^2}{4}\left\|y_{\bar{x}}\right]|^2, (y_0 = y_N = 0) \qquad \text{(B)}$$

tengsizlik o`rinlidir;

d) $\overline{\omega}_h = \{x_i = ih, 0 \le i \le N, x_N = 0, x_N = l\}$ *tekis to`r ustida aniqlamgan va x=0, x=l nuqtalarda nolga aylanadigan har qanday y(x) funksiya uchun*

$$\frac{h^2}{4}\left\|y_{\bar{x}}\right]|^2 \le \|y\|^2 \le \frac{l}{8}\left\|y_{\bar{x}}\right]|^2 \qquad \text{(D)}$$

tengsizlik o`rinlidir.

6. Endi bu tengsizliklarning tatbiqiga o`tamiz.

1) avval oddiy misol sifatida quydagi

$$u''(x) + f(x) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = u(1) = 0 \qquad (10)$$

masalani olamiz. Bu masala uchun $\overline{\omega}_h$ tekis to`rda ayrimali sxema

$$y_{\bar{x},x} + f(x) = 0, \quad x \in \overline{\omega}_h, \quad y_0 = y_N = 0 \qquad (11)$$

ko`rinishda yoziladi.

(11) masala yechimini baholashda energetik tengsizliklarni qo`llash uchun hosil bo`lgan ayrimali tenglamani hy ga ko`paytirib, $\overline{\omega}_h$ to`r tugunlari bo`yicha yig`amiz:

$$\sum_{i=1}^{N}(y_{\bar{x}x})_i y_i h + \sum_{i=1}^{N-1} f_i y_i h = 0, \qquad (12)$$

yoki skalyar ko`paytma ko`rinishida yozsak,

$$(y_{\bar{x}x}, y) + (f, y) = 0 \qquad (13)$$

hosil bo`ladi.

Grinning birinchi ayrimali formulasidan foydalansak,

$$-(y_{\bar{x}}, y_{\bar{x}}] + (f, y) = 0$$

yoki

$$\|y_{\bar{x}}\|^2 = (f, y)$$

kelib chiqadi.

Endi Koshi – Bunyakovskiy tengsizligi va (D) tengsizliklardan foydalansak,

$$\|y_{\bar{x}}]|^2 \le \|f\|\|y\| \le \frac{\|f\|\|y_{\bar{x}}]|}{\sqrt{8}}$$

yoki

$$\|y_{\bar{x}}]| \le \frac{\|f\|}{2\sqrt{2}}$$

hosil bo`ladi. Nihoyat by oxirgi tengsizlik va (A) dan foydalanib, (11) masalaning yechimi uchun quyidagi

$$\|y\|_c \le \frac{\|f\|}{4\sqrt{2}} \qquad (14)$$

bahoni hosil qilamiz.

Bu formulalardan qabul qilingan sxemaning yaqinlashishini isbotlash uchun ham foydalanish mumkin. (10) masalani (11) bilan almashtirganda yo`l qo`yilgan xatoni hisoblash uchun $z=y-u$ ekanligini e'tiborga olib, (11) dan z uchun

$$z_{\bar{x}x} + \psi(x) = 0, \quad z \in \omega_h, \; z_0 = z_N = 0 \qquad (15)$$

tenglamani hosil qilamiz, bu yerda

$$\psi(x) = u_{\bar{x}x} + f(x)$$

Endi (14) formulani (15) masalaning yechimini baholash uchun qo`llashimiz mumkin, ya'ni

$$\|z\|_C \le \|\psi\| / 4\sqrt{2}.$$

Lekin $\psi(x) = O(h^2)$ bo`lganligidan

$$\|z\|_C = \|y - u\|_C \le Mh^2,$$

ya'ni yaqinlashish ham approksimatsiya kabi h^2 tartibga ega.

7. Maksimum prinsipi. Ayrim ayrimali masalalar yechimlarini baholashda maksimum prinsipidan foydalanish mumkin bo`ladi. Quyidagi

$$\Lambda y = (\Lambda y)_i = A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1}, \quad i = \overline{1, N-1} \tag{39}$$

operator uchun maksimum prinsipidan foydalanaylik, bu yerda

$$A_i > 0,\ B_i > 0,\ C_i \geq A_i + B_i \tag{40}$$

1-teorema. *Agar (40) shart bajarilib, barcha i lar uchun* $(\Lambda y)_i \geq 0, ((\Lambda y)_i \leq 0)$ *bo`lsa, u holda o`zgarmas bo`lmagan* $y_i$ *funksiya o`zining eng katta musbat (eng kichik manfiy) qiymatini* $i = \overline{1, N-1}$ *nuqtalarda qabul qila olmaydi.*

Isboti. Biror ichki nuqtada musbat maksimum mavjud bo`lsin deb faraz qilaylik. Bizga ma'lumki, $y_i \neq const$. Bu yerdan, aqalli bitta $i = i_0$ nuqta topiladiki, $y_{i_0} = \max\limits_{0 \leq i \leq N} y_i = M_0 > 0$ munosabat bajariladi. Lekin $i_0$nuqtaga qo`shni bo`lgan birorta, masalan, $i = i_0 - 1$nuqtada $y_{i_0 - 1} < M_0$bo`ladi.

(39) ni quyidagi ko`rinishda yozaylik:

$$(\Lambda y)_i = B_i(y_{i+1} - y_i) - A_i(y_i - y_{i-1}) - (C_i - A_i - B_i)y_i,$$

$i = i_0$ nuqtada (40) shartdan quydagi

$$\begin{aligned}(\Lambda y)_i &= B_{i_0}(y_{i_0+1} - y_{i_0}) - A_{i_0}(y_{i_0} - y_{i_0-1}) - \\ &-(C_{i_0} - A_{i_0} - B_{i_0})y_{i_0} \leq -A_{i_0}(y_{i_0} - y_{i_0-1}) < 0\end{aligned}$$

Tengsizlik kelib chiqadi. Bu esa teorema shartidagi $(\Lambda y)_i > 0$ munosabatga ziddir. Qarama-qarshilik farazimizning noto`g`ri ekanligini ko`rsatadi. Teoremaning ikkinchi qismi ham xuddi shunday isbotlanadi.

1-natija. *Agar barcha i=1, 2, ..., N-1 uchun* $(\Lambda y)_i \le 0$ *bo`lib,* $y_0 \ge 0, y_N \ge 0$ *bo`lsa, u holda* $y_i \ge 0, (i=1,2,...,N-1)$ *bo`ladi va* $(\Lambda y)_i \ge 0$ *bo`lib* $y_0 \le 0, y_N \le 0$ *bo`lsa,* $y_i \le 0 (i=1,2,...,N-1)$ *bo`ladi.*

2-natija. *Agar (40) shart bajarilsa,* $P_i = 0,\ \mu_1 = \mu_2 = 0$ *bo`lganida*

$$(\Lambda y)_i = -F_i,\ \ i = \overline{1, N-1},\ \ y_0 = \mu_1; y_N = \mu_2 \tag{41}$$

masalaning yagona yechimi aynan nol bo`ladi. Bu yerdan esa har qanday $F_i; \mu_1; \mu_2$ *larda (41) masalaning bir qiymatli ravishda yechilishi kelib chiqadi.*

2-teorema. *Faraz qilaylik,* y_i (41) *masalaning yechimi,* $\overline{v}_i$ *esa* $F_i; \mu_1; \mu_2$ *larni mos ravishda* $\overline{F}_i; \overline{\mu}_1; \overline{\mu}_2$ *lar bilan almashtirishdan hosil bo`lgan masalaning yechimi bo`lsin. Agar*

$|F_i| \le \overline{F}_i,\ i = \overline{1, N-1},\ |\mu_\alpha| \le \overline{\mu_\alpha},\ \alpha=1,2$ *bo`lsa,* $|y_i| \le \overline{y_i},\ i = \overline{0, N}$ *baho o`rinli bo`ladi.*

3-teorema. (41) *masalada* $F_i = D_i \varphi_i,\ i = \overline{1, N-1},\ \mu_1 = \mu_2 = 0,\ D_i = C_i - B_i - A_i \ge 0$ *shart bajarilsa, u holda*

$$\|y\|_C = \max_{0 \le i \le N} |y_i| \le \|\varphi\|_C$$

baho o`rinli bo`ladi.

XULOSA

Xulosa qilib aytganda, ayrimali masalalar yechimlarini baholashda maksimum prinsipidan foydalanish eng samarali usullardan biri hisoblanadi. Ko`paytmaning differensiali, bo`laklab integrallash, Grin formulalari va joylashtirish teoremalarining eng soddalarini ayrimali algoritmlarini keltirib chiqarilgan va bu formulalar orqali to'r masalalari, yaqinlashish masalalari tekshiriladi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO`YXATI:

1.V.Q.Qobulov, Funksional analiz va hisoblash matematikasi. "O'qtuvchi" Toshkent-1976.

2.Л. В. Контарович и Г. П. Акилов. Функциональный анализ в пормированных пространствах, М., Физматгиз, 1959.

3.Sh. A. Ayupov, M. A. Berdiqulov, R. M. Turg'unbayev, Funksional analiz. Toshkent, 2007.

4.А.Н. Колмогоров, С.В. Фоминов, Элементы теории функций и функционального анализа, Москва, Наука, 1976.