KASR TARTIBLI DIFFERENSIAL OPERATORLI TENGLAMALAR UCHUN UMUMLASHGAN RITS USULI

Karimov Shaxobiddin To'ychiboyevich
(Farg'ona davlat universiteti matematika-informatika fakulteti "Amaliy matematika va informatika" kafedrasi mudiri)
Xaydarova Sevara Adxamovna
(Farg'ona davlat universiteti 2-kurs magistranti)

Annotatsiya: Maqolada kasr tartibli differensial operator bilan kasr tartibli integro-differensial tenglamalarning sonli yechimini topish uchun Rits usulini qo'llashni nazariy asoslash natijalari keltirilgan. Raqamli yechimning strukturasi keltirilib, kasr tartibli differensiallash operatori tomonidan hosil qilingan energiya fazosining metrikasi bo'yicha taxminiy yechim xatosining bahosi olinadi. Kasrli differensial tenglamaning ma'lum bir holati uchun taqribiy yechimning dastlabki muammoning aniq yechimiga yaqinlashishi uchun baho beriladi.

Kalit so'zlar: differensial tenglamalar, Veyl kasr tartibli hosilasi, kasr tartibli differensiallash operatorlari, Rits usuli.

KIRISH

Integral va differensiallikni butun son bo'lmagan tartiblarga kengaytirish g'oyasi integral va differensial hisoblar paydo bo'lganidan beri mavjud. Biroq, keng qo'llanilishi mumkin bo'lgan sohaga qaramay, yaqin vaqtgacha bu sohaga kam e'tibor qaratildi. Masalan, kasr hisobi viskoelastik jismlar modellarida, atmosfera qatlamlarida harorat va namlik o'zgarishi xotirasi, harorat va namlik o'zgarishi bilan uzluksiz muhitlar, diffuziya tenglamalarida va boshqa sohalarda qo'llaniladi.

Keyingi yillarda kasr tartibli differensial va integral tenglamalar yechimlariga katta e'tibor berilmoqda. Kasr tartibli integro-differensial tenglamalar mexanika, yadroviy muhandislik, kimyo, astronomiya, biologiya, iqtisod, potentsial nazariya va elektrostatikada ko'plab ilovalarga ega. Ayrim hollarda, bunday kasr tartibli integro-differensial tenglamalarning aniq yechimini topish mumkin emas. Ko'pgina hollarda integro-differensial tenglamalarning analitik yechimlari izlash qiyin vazifa bo'ladi, shuning uchun samarali taqribiy yechimni olish talab etiladi.

Masalaning qo 'yilishi. Ushbu

$$D^{(\alpha)}u + qu = f, x \in (0;1), \quad u(0) = u(1) = 0 \tag{1}$$

masalani ko'rib chiqaylik, (1) masalaning taqribiy yechimini Rits usulida izlaymiz. Bazis funksiyalar sifatida $D(A)$ aniqlanish sohasida $A = D^{(\alpha)} + qc$ operatorning $[0;1]$ kesmada uzluksiz va ikkinchi tartibli hosilasigacha $u(0) = u(1) = 0$ shartni qanoatlantiruvchi xos funksiyalarini olamiz. A operatorning λ_i xos qiymati va φ_i xos funksiyasi bo'ladi hamda $\lambda_i = i^2\pi^2 + q$, $\varphi_i = \sin i\pi x, i = 1, 2, \ldots$ ko'rinishga ega. U holda (1) ning taqribiy yechimini quyidagi ko'rinishda izlaymiz:

$$u_N(x) = \sum_{i=1}^{N} a_i \sin i\pi x, \tag{2}$$

bu yerda yig'indining noma'lum koeffitsiyentlari quyidagi shaklda berilgan:

$$a_i = \frac{2}{i^2\pi^2 + q} \int_0^1 f(x) \sin i\pi x dx.$$

Hisoblash sxemasini sonli amalga oshirishning tatbiqlari

(1) masala uchun sonli hisoblash jarayonini ko'rib chiqaylik:

1-misol. (1) masalada $\alpha = 2.5$, $q = 1$ bo'lsin, u holda tenglama quyidagi ko'rinishni oladi:

$$D^{(2,5)}u + u = f(x), \quad x \in (0;1), \quad u(0) = u(1) = 0, \tag{3}$$

bu yerda $f(x) = \left(1 + b^{2,5}\right)\sin bx - \left(1 + (\pi - b)^{2,5}\right)\sin(\pi - b)x.$

Bunda aniq yechim $u(x) = \sin bx - \sin(\pi - b)x$ ga teng bo'ladi.

Haqiqatda (3) tenglamaga $D^{(\alpha)}(\sin bx) = b^{\alpha} \sin bx$ tenglikdan foydalanib, aniq yechimni qo'llab quyidagini olamiz:

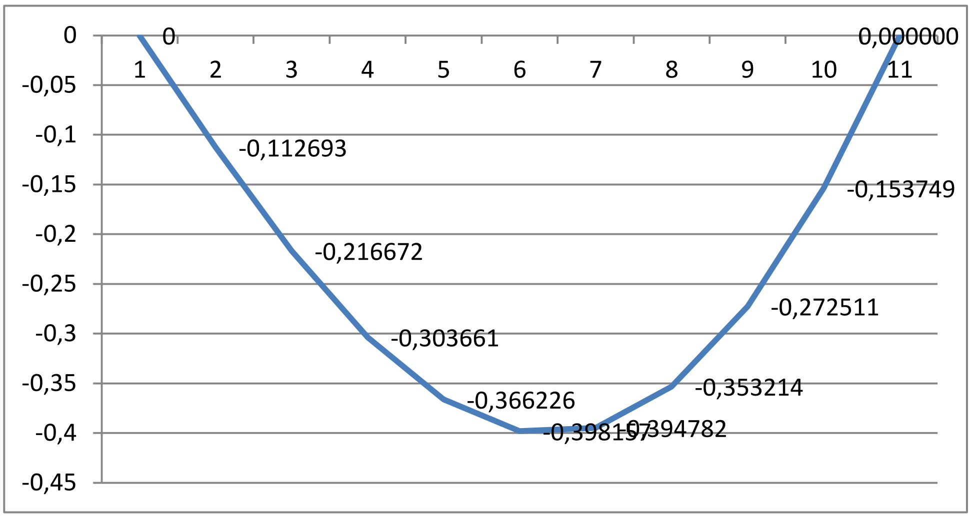
$$\mathrm{b}^{2,5} \sin bx - (\pi - b)^{2,5} \sin(\pi - b)x + \sin bx - \sin(\pi - b)x =$$
$$= \left(1 + b^{2,5}\right)\sin bx - \left(1 + (\pi - b)^{2,5}\right)\sin(\pi - b)x.$$

(3) ning taqribiy yechimini (2) qator ko'rinishida izlaymiz, noma'lum koeffitsiyentlarni quyidagi aniq integral yordamida topamiz:

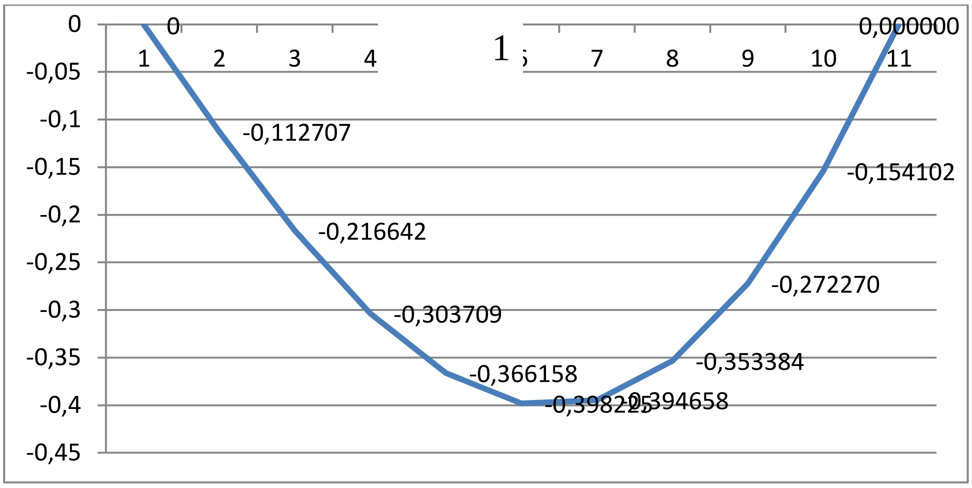
$$\alpha_i = \frac{2}{i^2\pi^2 + 1} \int_0^1 \left(\left(1 + b^{2,5}\right)\sin bx - \left(1 + (\pi - b)^{2,5}\right)\sin(\pi - b)x\right) \sin i\pi x.$$

x_i	$u(x)$	$u_N(x)$	$\lvert u(x) - u_N(x) \rvert < \varepsilon$
0	0	0	0,000000
0,1	-0,112693	-0,112707	0,000015
0,2	-0,216672	-0,216642	-0,000031
0	-0,303661	-0,303709	0,000048

,3			
0,4	-0,366226	-0,366158	-0,000068
0,5	-0,398157	-0,398225	0,000068
0,6	-0,394782	-0,394658	-0,000125
0,7	-0,353214	-0,353384	0,000170
0,8	-0,272511	-0,272270	-0,000241
0,9	-0,153749	-0,154102	0,000353
1	0,000000	0,000000	0,000000



1



2

Formulaga *b=1* qiymatini qo‘yib, *N=10* uchun taqribiy yechim grafigi 1-rasmda, mos ravishda aniq yechim grafigi esa 2-rasmda keltirilgan.

2-misol. (1) masalada $\alpha = 1.4$, $q = 1$ bo‘lsin, u holda tenglama quyidagi ko‘rinishni oladi:

$$D^{(1,4)}u + u = f(x), \quad x \in (0;1), \quad u(0) = u(1) = 0, \tag{4}$$

bu yerda $f(x)=\left(\pi+b^{1,4}\right)\sin(\pi+b)x-\left(b^{1,4}+1\right)\sin bx.$

Bunda aniq yechim $u(x)=\sin bx+\sin(\pi+b)x$ ga teng bo‘ladi.

Haqiqatda (4) tenglamaga $D^{(\alpha)}(\sin bx)=b^{\alpha}\sin bx$ tenglikdan foydalanib, aniq yechimni qo‘llab quyidagini olamiz:

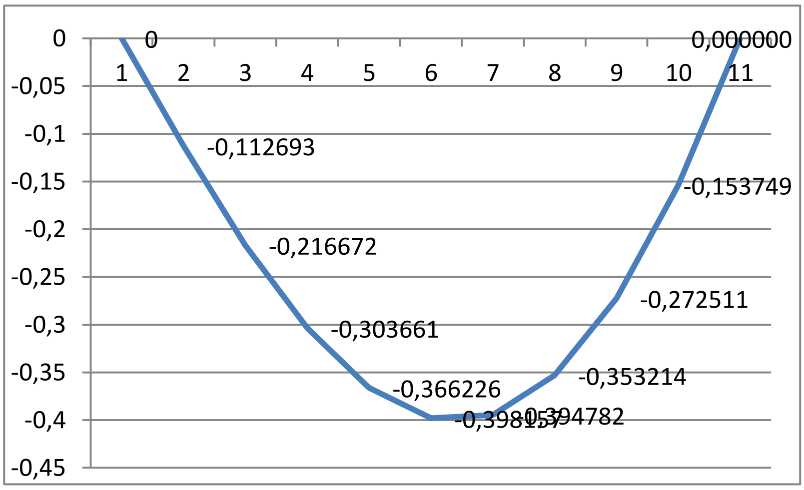
$$b^{1,4}\sin bx-(\pi+b)^{1,4}\sin(\pi+b)x+\sin bx+\sin(\pi+b)x=$$

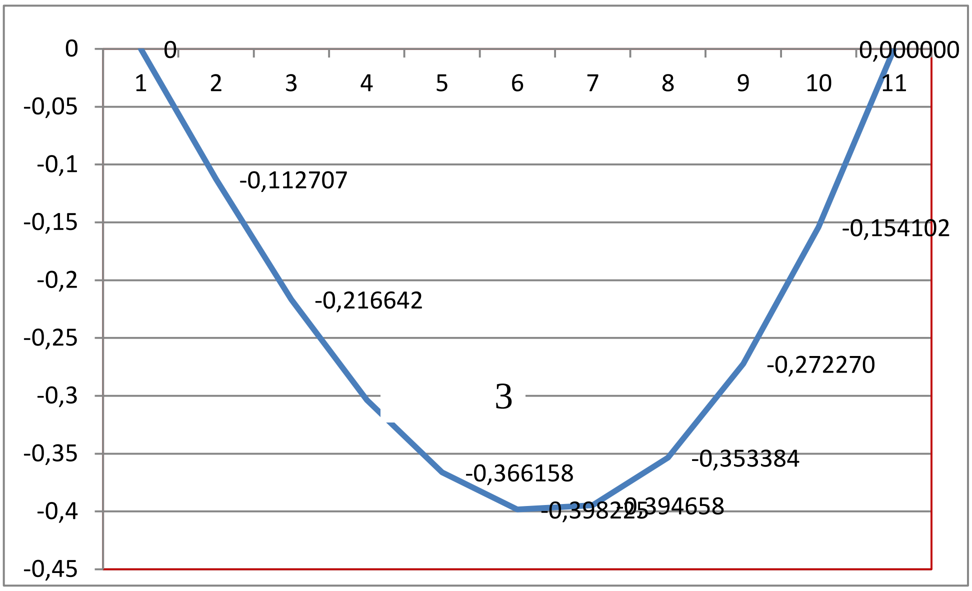
$$=\left(1+b^{1,4}\right)\sin bx+\left(1+(\pi+b)^{1,4}\right)\sin(\pi+b)x.$$

(4) ning taqribiy yechimini (2) trigonometrik qator ko‘rinishida izlaymiz, noma’lum koeffitsiyentlarni quyidagi aniq integral yordamida topamiz:

$$\alpha_i=\frac{2}{i^2\pi^2+1}\int_0^1\left(\left(1+b^{1,4}\right)\sin bx+\left(1+(\pi+b)^{1,4}\right)\sin(\pi+b)x\right)\sin i\pi x.$$

x_i	$u(x)$	$u_N(x)$	$\lvert u(x)-u_N(x)\rvert<\varepsilon$
0	0	0	0
0,1	0,11269256	0,10352668	0,00916588
0,2	0,21667249	0,19949712	0,01717537
0,3	0,30366083	0,28080674	0,02285409
0,4	0,36622583	0,34032637	0,02589946
0,5	0,39815702	0,37241804	0,02573898
0,6	0,39478246	0,37143901	0,02334345
0,7	0,3532143	0,33466228	0,01855202
0,8	0,27251111	0,2592049	0,01330621
0,9	0,1537493	0,1472248	0,0065245
1	0,0000000	0,000000	0,000000





Formulaga *b=-1* qiymatini qo‘yib, *N=10* uchun taqribiy yechim grafigi 3-rasmda, mos ravishda aniq yechim grafigi esa 4-rasmda keltirilgan.

XULOSA

Ushbu maqola kasr tartibli integro-differensial tenglamalarni variatsion usulda yechishga bag‘ishlangan bo‘lib, Veylning integro-differensial operatori va uning xossalari hamda davriy funksiyalarning kasr tartibli Veyl integrali va hosilasini aniqlash natijasida olingan ma’lumotlar keltirilgan. Veyl integro-differensial operatori qatnashgan tenglamalarni ıtsion usulda yechishda $D^{(\alpha)}u+qu=f, x\in(0;1),\quad u(0)=u(1)=0$ masalaning taqribiy yechimini Rits usulida keltirilgan. Misollarda hisoblash sxemasini sonli amalga oshirishning tatbiqlari ko‘rsatib berilgan. Olingan natijalar jadvalda keltirilgan bo‘lib, absolyut xatolik hisoblangan.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO‘YXATI:

1. Нахушев А.М. Элементы дробного исчисления и их применение. Нальчик, 2000.

2. Самко С.Г., Килбасс А.А, Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск, 1987.

3. Килбас А.А. Теория и приложения дифференциальных уравнений дробного порядка. -Самара: 2009.

4. Псху А.В. Начальная задача для линейного обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка // Математический сборник, 2011, том 202, №4, 111-122.

5. А.К.Уринов, С.М.Ситник, Э.Л.Шишкина, Ш.Т.Каримов. Дробные интегралы и производные (обобщения и приложения): учебное пособие; учебно-методическое издание; на русском языке; А.Уринов и др. Фергана: изд. "Фаргона",2022.-192 стр.

6. Уринов А.К., Каримов Ш.Т. Операторы Эрдейи-Кобера и их приложения к дифференциальным уравнениям в частных производных: монография; научное издание; на русском языке; /А.К.Уринов, Ш.Т. Каримов. Фергана: изд. "Фарғона", 2021. -202 стр.

7. O'rinov A. Q. Oddiy differensial tenglamalar uchun chegaraviy masalalar. Toshkent: Mumtoz so'z. 2014. 163 b.

8. O'rinov A. Q. Maxsus funksiyalar va maxsus operatorlar. "Farg'ona" nashriyoti, 2012. -112 b.

9. Maqsudov. Sh.T. Chiziqli integral tenglamalar elementlari. Toshkent.:1975. -179 b.

10. Галимянов А.Ф., Горская Т.Ю. Обобщенный метод Бубнова-Галеркина для уравнений с дробно-интегральным оператором// Известия КГАСУ, 2014,3(30). С. 398-402.

11. S.A.Xaydarova. Bubnov Galyorkin usuli. Farg'ona davlat universiteti "Zamonaviy matematikaning nazariy asoslari va amaliy masalalari" mavzusidagi Respublika ilmiy-amaliy anjuman materiallari. 2-qism. Aniq fanlar. – Andijon: ADU, 2022-yil. S. 231-236.

12. S.A.Xaydarova. Butun tartibli integro-differensial tenglamalarni yechish. *Pedagogs _Volume-11_Issue-2.15.07.2022*. S.145-154.

13. S.A.Xaydarova. Дробные интегралы и производные периодических функций. Farg'ona davlat universiteti. "Ilm-zakovatimiz – senga, ona-Vatan!" mavzusidagi Respublika onlayn ilmiy-amaliy anjuman materiallari. 1-qism. Aniq fanlar. – Farg'ona: FDU, 2022-yil. S. 110-112.

14. Каримов Ш.Т., Хайдарова С.А. Численное решение периодических уравнений с дробно-интегральным оператором вейля в главной части.//Fars Int J Soc Sci Hum 10(12);2022. Publishing centre of Finland. С.152-157.

15. Фармонов Ш., Хайдарова С. Обобщенный метод Бубнова-Галеркина для уравнений с дробно-дифференциальным оператором // Norwegian Journal of Development of the International Science. 2022. №99.С.10-15.

16. Абдулазиз угли, Ю. М., Каримбердиевич, О. М., & Махамадин угли, Ё. А. (2022). АЛГОРИТМЫ РАСПОЗНОВАНИЯ РЕЧИ И КЛАССИФИКАЦИЯ МЕТОДОВ РАСПОЗНОВАНИЯ РЕЧИ. CENTRAL ASIAN JOURNAL OF MATHEMATICAL THEORY AND COMPUTER SCIENCES, 3(10), 15-19. Retrieved from https://cajmtcs.centralasianstudies.org/index.php/CAJMTCS/article/view/240MORE CITATION FORMATS