УДК 517.98

О КРАЙНИХ ТОЧКАХ МНОЖЕСТВА БИСТОХАСТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ

Абдумалик Искандарович Эшниязов
Гулистанский государственный университет

Аннотация: *В настоящей статье изучается структура множества всех квадратичных бистохастических операторов, а также полное описание всех крайних точек множества квадратичных операторов. Найдено необходимое и достаточное условие для бистохастичности квадратичного стохастического оператора. Изучен аналог теоремы Биркгофа о крайних точках множества бистохастических матриц. Найдено достаточное условие для крайности бистохастического квадратичного оператора в двумерном симплексе.*

Abstract: *In this article, we study the structure of the set of all quadratic bistochastic operators, as well as a complete description of all the extreme points of the set of quadratic operators. A necessary and sufficient condition for the bistochasticity of a quadratic stochastic operator is found. An analogue of Birkhoff's theorem on the extreme points of a set of bistochastic matrices is studied. A sufficient condition is found for the extremity of bistochastic quadratic operator and in a two-dimensional simplex.*

Ключевые слова: *Бистохастический квадратичный оператор, крайние точки множества бистохастических матриц.*

Key words: *Bistochastic quadratic operator, extreme points of the set of bistochastic matrices*

ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] выделен класс квадратичных стохастических операторов (КСО), отображающих конечномерный симплекс в себя, которые называются бистохастическими квадратичными операторами (б.к,о.). б.к,о. тесно связаны с понятием мажоризации и .применяются не только в задачах популяционной генетики [1], [10], но и в задачах экономики [11]. В математической экономике б.к,о называется оператором благосостояния. Изучение б.к,о было начато в работе [1] и было получено необходимое и достаточное условие для бистохастичности оператора. Эту теорему мы приведем ниже и неоднократно будем ею пользоваться. В данной работе показано, что множество б.к,о является выпуклым многогранником. Поэтому представляет интерес аналог теоремы Биркгофа о крайних точках множества бистохастических матриц [9]. Получены необходимые и достаточные условия для бистохастичности. Замечено, что множество всех бистохастических квадратичных операторов, действующих в , образует многогранник. Более того определено количество крайних точек множества б.к,о в двумерном симплексе.

1. Мажоризация в конечномерном симплексе и ее свойства

Пусть $S^{n-1} = \left\{ x = (x_1, ..., x_n) \colon \sum_{i=1}^{n} x_i = 1,\ x_i \geq 0 \right\}$ - стандартный симплекс в R^n. Следуя [11], обозначим через $x_{\downarrow} = \left(x_{[1]}, ..., x_{[n]} \right)$, где $x_{[1]} \geq ... \geq x_{[n]}$ - координаты точки $x \in S^{n-1}$, упорядоченные по невозрастанию.

Определение 1. [11]. Если $x, y \in S^{n-1}$ и выполнены неравенства $\sum_{i=1}^{k} x_{[i]} \leq \sum_{i=1}^{k} y_{[i]},\ k = \overline{1,n}$, то говорят, что y мажорирует x и пишут $x \prec y$.

Эти термины и обозначения введены Харди, Литтльвудом и Пойя [12]. Очевидно, для любого $x \in S^{n-1}$ имеем

$$\left(\frac{1}{n}, ..., \frac{1}{n} \right) \prec x \prec (1, 0, ..., 0).$$

Как известно [11], необходимым и достаточным условием для выполнения отношения $x \prec y$ является существование бистохастической матрицы P, такой, что $x = Py$. Напомним, что матрица

$P=(P_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ называется бистохастической (дважды стохастической, двояко стохастической), если $P_{ij}\geq 0$, $\sum_{i=1}^{n}P_{ij}=\sum_{j=1}^{n}P_{ij}=1$.

Следовательно, для бистохастической матрицы P справедливо отношение $Px\prec x$ для любой точки $x\in S^{n-1}$. Последнее свойство может быть принято в качестве определения бистохастичности P [11]. Следуя этому, мы сохраним термин бистохастичность за произвольным непрерывным (вообще говоря, нелинейным) оператором $V:\ S^{n-1}\to S^{n-1}$, удовлетворяющим условию

$$Vx\prec x. \tag{1}$$

для всех $x\in S^{n-1}$.

В частности, квадратичный стохастический оператор $V:\ S^{n-1}\to S^{n-1}$ определяется равенством

$$(Vx)_k=\sum_{i,j=1}^{n}P_{ij,k}x_ix_j\ ,\ k=\overline{1,n}, \tag{2}$$

где $P_{ij,k}=P_{ji,k}\geq 0$ и $\sum_{k=1}^{n}P_{ij,k}=1$, при выполнении (1) называется бистохастическим (далее б.к.о.).

2. Бистохастические квадратичные операторы

Цель настоящего параграфа состоит в описании класса б.к.о., которые обозначим через **B**.

Теорема 1. [3] Если $V:\ S^{n-1}\to S^{n-1}$ – б.к.о., то коэффициенты $P_{ij,k}$ удовлетворяют следующим условиям:

$$\text{а)}\ \sum_{i,j=1}^{n}P_{ij,k}=n,\qquad \forall\ k=\overline{1,n} \tag{3}$$

$$\text{б)}\ \sum_{j=1}^{n}P_{ij,k}\geq\frac{1}{2},\qquad \forall\ i,k=\overline{1,n} \tag{4}$$

$$\text{в)}\ \sum_{i,j\in I_t}P_{ij,k}\leq t,\qquad \forall\ t,k=\overline{1,n}, \tag{5}$$

где $I_t=\{i_1,i_2,\dots,i_t\}$ – произвольное подмножество множества $I=\{1,\ 2,\dots,\ n\}$, содержащее t элементов.

Матрица $T=(t_{ij})$, $i,j=\overline{1,n}$ называется *субстохастической*, если $t_{ij}\geq 0$ и $\sum_{j=1}^{n}t_{ij}\leq 1$. Если в последнем неравенстве при всех $i=\overline{1,n}$ имеет знак равенства, то T называется стохастической.

Рассмотрим следующее уравнение относительно T.

$$A=\frac{1}{2}(T+T'), \tag{6}$$

где T'–транспонированная матрица.

Ниже будем заниматься условием разрешимости уравнения (6) в классе субстохастических матриц.

Пусть G_n – группа перестановок индексов $\{1,\dots,n\}$. Для $\pi\in G_n$, через A_π обозначим матрицу $A_\pi=(a_{\pi(i)\pi(j)})$, $i,j=\overline{1,n}$, которая называется перестановкой матрицы A. Следующие предложения следуют из определений:

- $(A_\pi)_{\pi^{-1}}=A$;
- если A – симметрическая, то A_π также симметрическая;
- если A – субстохастическая, то T_π также субстохастическая;
- $(A+B)_\pi=A_\pi+B_\pi$, $(\lambda A)_\pi=\lambda\cdot A_\pi$.

Из перечисленных свойств следует, что если T является решением уравнения (6), то T_π является решением следующего уравнения:

$$A_\tau = \frac{1}{2}(T + T^\tau).$$

Теорема 2. [3] Пусть $A = (a_{ij})$ – симметрическая неотрицательная $(a_{ij}) \geq 0$ матрица. Для существования субстохастической матрицы $T = (t_{ij})$ удовлетворяющей уравнению (6), необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{i,j \in I_k} a_{ij} \leq k \qquad (7)$$

для любого $k = \overline{1,n}$ и любого набора k индексов $I_k = \{i_1, ..., i_k\}$.

Доказательство. (проводится в [3])

Следствие. Если $A = (a_{ij})$ – неотрицательная матрица, то для существования стохастической матрицы $T = (t_{ij})$, такой, что $A = \frac{1}{2}(T + T')$, необходимо и достаточно, чтобы для любого набора $k = \overline{1,n}$ индексов $I_k = \{i_1, ..., i_k\}$ выполнялось неравенство

$$\sum_{i,j \in I_k} a_{ij} \leq k, \qquad (8)$$

причем, если $k = n$, то в (8) имеет место равенство.

Замечание. Субстохастическая матрица T, существование которой гарантируется теоремой 2, вообще говоря, не единственна.

П р и м е р. Для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,3 & 0,4 \\ 0,3 & 0,1 & 0,5 \\ 0,4 & 0,5 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

множеством решений уравнения $A = \frac{1}{2}(T + T')$ в классе субстохастических матриц является

$$T_\alpha = \begin{pmatrix} 0,1 & \alpha & 0,9-\alpha \\ 0,6-\alpha & 0,1 & 0,3+\alpha \\ \alpha - 0,1 & 0,7-\alpha & 0,4 \end{pmatrix},$$

где $0,1 \leq \alpha \leq 0,6$.

Нетрудно заметить, что множество решений уравнения $A = \frac{1}{2}(T + T')$ является выпуклым многогранником. Действительно, субстохастические матрицы $T = (t_{ij})$, $i, j = \overline{1,n}$, коэффициенты которых удовлетворяют следующей системе линейных неравенств:

$$\begin{cases} 0 \leq t_{ij} \leq 1 \\ t_{ij} + t_{ji} = 2a_{ij} \\ \sum_{j=1}^{n} t_{ij} \leq 1 \end{cases},$$

образуют выпуклый компакт, ограниченный плоскостью.

Очевидно, из $A = \frac{1}{2}(T + T')$ следует $(Ax, x) = (Tx, x)$, где $(\cdot,\cdot)$ – скалярное произведение R^m.

Действительно,

$$(Ax, x) = \frac{1}{2}((T + T')x, x) = \frac{1}{2}[(Tx, x) + (T'x, x)] = (Tx, x) \qquad (9)$$

Продолжим изучение бистохастических квадратичных операторов.

Согласно теореме 1, если $V: S^{m-1} \to S^{m-1}$ – б.к.о., то $\sum_{i,j \in I_t} P_{ij,k} \leq t,$

где $I_t = \{ i_1, ..., i_t \}$ – произвольный набор t индексов, причем при $t = n$ имеет место равенство.

Положив $A_k = (P_{ij,k})_{i,j=1}^{n}$ и используя следствие из теоремы 2, находим стохастические матрицы T_k такие, что $A = \frac{1}{2}(T + T')$, $k = \overline{1,n}$.

Согласно (9), имеем $\sum_{i,j=1}^{n} P_{ij,k} x_i x_j = (A_k x, x) = (T_k x, x)$.

Итак, если V – б.к.о., то можно найти стохастические матрицы $T_1, ..., T_n$, такие, что

$$Vx = ((T_1 x, x), (T_2 x, x), ..., (T_n x, x)).$$

Докажем неравенство: $\min_{1\le i\le n} x_i \le (Tx, x) \le \max_{1\le i\le n} x_i$, $\forall x \in S^{n-1}$, или в принятых обозначениях:

$$x_{[n]} \le (Tx, x) \le x_{[1]}, \forall x \in S^{n-1}. \qquad (10)$$

Здесь T – любая стохастическая матрица.

Действительно, если $t_{ij} \ge 0$ и $\sum_{j=1}^{n} t_{ij} = 1$, то $x_{[n]} \le \sum_{j=1}^{n} t_{ij} x_j \le x_{[1]}$ для любого $x \in R^n$. В частности, при $x \in S^{n-1}$ имеем

$$(Tx, x) = \sum_{i,j=1}^{n} t_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{j=1}^{n} t_{ij} x_j \right).$$

Учитывая $x_i \ge 0$, $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$ и предыдущее неравенство, получаем требуемое неравенство (10).

Теорема 3.[4] Пусть $A = (a_{ij})$ – неотрицательная симметрическая матрица. Тогда для выполнения неравенства $x_{[n]} \le (Ax, x) \le x_{[1]}$, при всех $x \in S^{n-1}$, необходимо и достаточно, чтобы $\sum_{i,j \in I_t} a_{ij} \le t$, для любого $I_t = \{ i_1, ..., i_t \}$, где $t = \overline{1,n}$, причем при $t = n$ имеет место равенство.

Введём обозначения:

$$\mathfrak{T}_k = \left\{ T = (t_{ij}),\ i, j = \overline{1,n}\ \ 0 \le t_{ij} \le 1,\ \sum_{j=1}^{n} t_{ij} = k \right\},\quad 1 \le k \le n$$

$$\mathrm{U}_k = \left\{ A = (a_{ij}):\ a_{ij} = a_{ji},\ A = \frac{1}{2}(T + T'),\ T \in \mathfrak{T}_k \right\},\quad 1 \le k \le n$$

Далее U_k будем называть симметризацией $\mathfrak{T}_k$.

Теорема 4.[4] Если $A \in \mathrm{U}_k$, то для любого $x \in S^{n-1}$ выполняется неравенство:

$$x_{[n]} + x_{[n-1]} + ... + x_{[n-k+1]} \le (Ax, x) \le x_{[1]} + ... + x_{[k]}.$$

Перечислим несколько простых свойств множеств U_k, которые нам понадобятся. Через E обозначим матрицу порядка $n \times n$, все элементы которой суть 1.

Теорема 5. [4] Верны следующие предложения:

i) $A \in \mathrm{U}_k \Leftrightarrow E - A \in \mathrm{U}_{n-k}$, $k = \overline{1, n-1}$;

ii) $\mathrm{U}_k \cap \mathrm{U}_l = \varnothing$, при $k \ne l$;

iii) $\mathrm{U}_k = \{E\}$;

iv) $A \in \mathrm{U}_k \Rightarrow \frac{p}{k} \cdot A \in \mathrm{U}_p$, $1 \le p \le k$;

v) $\mathrm{U}_k + \mathrm{U}_l \supset \mathrm{U}_{k+l}$, $k + l \le n$;

vi) U_k –многогранник.

Пусть матрица $T = (t_{ij}) \in \mathfrak{T}_k$ – решение уравнения $A = \frac{1}{2}(T + T')$, где $A = (a_{ij})$ – заданная симметрическая матрица с неотрицательными элементами.

Очевидно, разрешимость последнего уравнения равносильна существованию решений системы линейных неравенств:

$$\begin{cases} 0 \le t_{ij} \le 1; \quad i, j = \overline{1,n} \\ t_{ij} + t_{ji} = 2a_{ij}; \quad i > j \\ \sum_{j=1}^{n} t_{ij} = k; \quad i = \overline{1,n} \end{cases} \qquad (11)$$

3. Описания крайних точек множества бистохастических квадратичных операторов.

Квадратная матрица называется матрицей перестановки (перестановочной матрицей), если в каждой ее строке и в каждом столбце стоит ровно одна единица, а все остальные элементы являются нулями.

Напомним, что точка x множества A некоторого векторного пространства называется крайней, если $A \setminus \{x\}$ является выпуклым множеством. Множество всех крайних точек множества A обозначается через $extrA$.

Согласно теореме Биркгофа [9],

(I) крайними точками выпуклого множества бистохастических матриц являются матрицы перестановок,

(II) множество бистохастических матриц совпадает с замыканием выпуклой оболочки множества матриц перестановок.

Разумеется, если верно (I), то (II) вытекает из

(II') множество бистохастических матриц совпадает с замыканием выпуклой оболочки множества своих крайних точек.

Из приведенного определения бистохастичности, получение каких либо свойств б.к.о. является трудным.

Следовательно, получение необходимых и достаточных свойств для бистохастичности к.с.о. является весьма полезным.

Теорема 6. [7] Пусть $V = (A_1 | A_2 | ... | A_m) \in \mathrm{B}$. Если для некоторой перестановки π любых $m-1$ элементов из $\{1, 2, ..., m\}$, $A_{\pi(k)} \in extr\mathbf{U}_1$, то $V \in extr\mathrm{B}$.

Теорема 7. [7] Пусть $V = (A_1 | A_2 | A_3 |) \in \mathrm{B}$. $V \in extr\mathrm{B}$ тогда и только тогда, когда по крайней мере два из трех матриц A_1, A_2, A_3 являются крайними в $\mathbf{U}_1$.

Теорема 8. [7] Если $A = (a_{ij}) \in extr\mathbf{U}_1$, то $a_{ii} = 0 \vee 1$, при $i \ne j$, $a_{ij} = 0 \vee 0,5 \vee 1$.

При $m = 2$ условия теоремы 2 являются необходимыми и достаточными. Также количество крайних точек равно 4 и ими являются:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0,5 \\ 0,5 & 1 \end{pmatrix}$$

Обозначим:

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \end{pmatrix}$$

Следствие 1. Если $m = 3$, то $A \in extrU_1$ тогда и только тогда $a_{ii} = 0 \vee 1$, при $i \ne j$, $a_{ij} = 0 \vee 0,5 \vee 1$ и $A \ne H$. Более того, $|extr\mathrm{U}_1| = 25$.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 & 1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0,5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0,5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,5 \\ 0 & 1 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_5=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0,5\\1&0,5&0\end{pmatrix}\quad A_6=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\quad A_7=\begin{pmatrix}0&0,5&0\\0,5&0&0,5\\0&0,5&1\end{pmatrix}\quad A_8=\begin{pmatrix}0&0,5&0\\0,5&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$$

$$A_9=\begin{pmatrix}0&0,5&0\\0,5&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\quad A_{10}=\begin{pmatrix}0&0,5&0\\0,5&1&0,5\\0&0,5&0\end{pmatrix}\quad A_{11}=\begin{pmatrix}0&0,5&0,5\\0,5&0&0\\0,5&0&1\end{pmatrix}\quad A_{12}=\begin{pmatrix}0&0,5&0,5\\0,5&1&0\\0,5&0&0\end{pmatrix}$$

$$A_{13}=\begin{pmatrix}0&0,5&1\\0,5&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\quad A_{14}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\quad A_{15}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0,5\\0&0,5&0\end{pmatrix}\quad A_{16}=\begin{pmatrix}0&1&0,5\\1&0&0\\0,5&0&0\end{pmatrix}$$

$$A_{17}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0,5\\0&0,5&1\end{pmatrix}\quad A_{18}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\quad A_{19}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\quad A_{20}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0,5\\0&0,5&0\end{pmatrix}$$

$$A_{21}=\begin{pmatrix}1&0&0,5\\0&0&0,5\\0,5&0,5&0\end{pmatrix}\quad A_{22}=\begin{pmatrix}1&0&0,5\\0&1&0\\0,5&0&0\end{pmatrix}\quad A_{23}=\begin{pmatrix}1&0,5&0\\0,5&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\quad A_{24}=\begin{pmatrix}1&0,5&0\\0,5&0&0,5\\0&0,5&0\end{pmatrix}$$

$$A_{25}=\begin{pmatrix}1&0,5&0,5\\0,5&0&0\\0,5&0&0\end{pmatrix}\quad H=\begin{pmatrix}0&0,5&0,5\\0,5&0&0,5\\0,5&0,5&0\end{pmatrix}\quad E=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$$

Следствие 2. При $m=3$, $|extr\,\mathbf{B}|=222$.

Доказательство. Пусть $V=extr\,\mathbf{B}$, $V=(A_1\,|\,A_2\,|\,A_3)$. Из теоремы 6 следует, что $A_2, A_3\in extr\,\mathbf{U}_1$ с точностью до перестановки. Поэтому $A_1+A_2+A_3=E$ следует, что либо $A_1\in extr\,\mathbf{U}_1$, либо $A_1=H$.

Надо выбрать те тройки крайних точек, сумма которых равна E. Количество таких троек равно 37.

За счет перестановки получаем: $|extr\,\mathbf{B}|=37\times 3!=222$.

1. $A_1+A_{10}+A_{25}=\begin{cases}(Vx)_1=x_3^2+x_1x_3+x_2x_3\\(Vx)_2=x_2^2+x_1x_2+x_2x_3\\(Vx)_3=x_1^2+x_1x_2+x_1x_3\end{cases}$

2. $A_1+A_{12}+A_{24}=\begin{cases}(Vx)_1=x_3^2+x_1x_3+x_2x_3\\(Vx)_2=x_2^2+x_1x_2+x_1x_3\\(Vx)_3=x_1^2+x_1x_2+x_2x_3\end{cases}$

3. $A_1+A_5+A_{22}=\begin{cases}(Vx)_1=x_3^2+x_1x_3+x_2x_3\\(Vx)_2=2x_1x_2+x_2x_3\\(Vx)_3=x_1^2+x_2^2+x_1x_3\end{cases}$

4. $A_1+A_{16}+A_{20}=\begin{cases}(Vx)_1=x_3^2+x_1x_3+x_2x_3\\(Vx)_2=2x_1x_2+x_1x_3\\(Vx)_3=x_1^2+x_2^2+x_2x_3\end{cases}$

5. $A_2+A_9+A_{25}=\begin{cases}(Vx)_1=x_1x_3+2x_2x_3\\(Vx)_2=x_2^2+x_3^2+x_1x_2\\(Vx)_3=x_1^2+x_1x_2+x_1x_3\end{cases}$

6. $A_2+A_{12}+A_{23}=\begin{cases}(Vx)_1=x_1x_3+2x_2x_3\\(Vx)_2=x_2^2+x_1x_2+x_1x_3\\(Vx)_3=x_1^2+x_3^2+x_1x_2\end{cases}$

7. $A_2+A_4+A_{22}=\begin{cases}(Vx)_1=x_1x_3+2x_2x_3\\(Vx)_2=x_3^2+2x_1x_2\\(Vx)_3=x_1^2+x_2^2+x_1x_3\end{cases}$

8. $A_2+A_6+A_{19}=\begin{cases}(Vx)_1=x_1x_3+2x_2x_3\\(Vx)_2=2x_1x_2+x_1x_3\\(Vx)_3=x_1^2+x_2^2+x_3^2\end{cases}$

9. $A_3+A_8+A_{25}=\begin{cases}(Vx)_1=x_2^2+x_3^2+x_1x_3\\(Vx)_2=x_1x_2+2x_2x_3\\(Vx)_3=x_1^2+x_1x_2+x_1x_3\end{cases}$

10. $A_3+A_{15}+A_{21}=\begin{cases}(Vx)_1=x_2^2+x_3^2+x_1x_3\\(Vx)_2=2x_1x_2+x_2x_3\\(Vx)_3=x_1^2+x_1x_3+x_2x_3\end{cases}$

11. $A_3+A_{16}+A_{18}=\begin{cases}(Vx)_1=x_2^2+x_3^2+x_1x_3\\(Vx)_2=2x_1x_2+x_1x_3\\(Vx)_3=x_1^2+2x_2x_3\end{cases}$

12. $A_3+A_{24}+H=\begin{cases}(Vx)_1=x_2^2+x_3^2+x_1x_3\\(Vx)_2=x_1^2+x_1x_2+x_2x_3\\(Vx)_3=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3\end{cases}$

13. $A_4+A_7+A_{25}=\begin{cases}(Vx)_1=x_2^2+x_1x_3+x_2x_3\\(Vx)_2=x_3^2+x_1x_2+x_2x_3\\(Vx)_3=x_1^2+x_1x_2+x_1x_3\end{cases}$

14. $A_4+A_{11}+A_{24}=\begin{cases}(Vx)_1=x_2^2+x_1x_3+x_2x_3\\(Vx)_2=x_3^2+x_1x_2+x_1x_3\\(Vx)_3=x_1^2+x_1x_2+x_2x_3\end{cases}$

15. $A_4+A_{14}+A_{21}=\begin{cases}(Vx)_1=x_2^2+x_1x_3+x_2x_3\\(Vx)_2=x_3^2+2x_1x_2\\(Vx)_3=x_1^2+x_1x_3+x_2x_3\end{cases}$

16. $A_4+A_{16}+A_{17}=\begin{cases}(Vx)_1=x_2^2+x_1x_3+x_2x_3\\(Vx)_2=2x_1x_2+x_1x_3\\(Vx)_3=x_1^2+x_3^2+x_2x_3\end{cases}$

17. $A_4+A_{23}+H=\begin{cases}(Vx)_1=x_2^2+x_1x_3+x_2x_3\\(Vx)_2=x_1^2+x_3^2+x_1x_2\\(Vx)_3=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3\end{cases}$

18. $A_5+A_9+A_{24}=\begin{cases}(Vx)_1=2x_1x_3+x_2x_3\\(Vx)_2=x_2^2+x_3^2+x_1x_2\\(Vx)_3=x_1^2+x_1x_2+x_2x_3\end{cases}$

19. $A_5+A_{10}+A_{23}=\begin{cases}(Vx)_1=2x_1x_3+x_2x_3\\(Vx)_2=x_2^2+x_1x_2+x_2x_3\\(Vx)_3=x_1^2+x_3^2+x_1x_2\end{cases}$

20. $A_5+A_{14}+A_{20}=\begin{cases}(Vx)_1=2x_1x_3+x_2x_3\\(Vx)_2=x_3^2+2x_1x_2\\(Vx)_3=x_1^2+x_2^2+x_2x_3\end{cases}$

21. $A_5+A_{15}+A_{19}=\begin{cases}(Vx)_1=2x_1x_3+x_2x_3\\(Vx)_2=2x_1x_2+x_2x_3\\(Vx)_3=x_1^2+x_2^2+x_3^2\end{cases}$

22. $A_6+A_7+A_{24}=\begin{cases}(Vx)_1=x_2^2+2x_1x_3\\(Vx)_2=x_3^2+x_1x_2+x_2x_3\\(Vx)_3=x_1^2+x_1x_2+x_2x_3\end{cases}$

23. $A_6+A_8+A_{23}=\begin{cases}(Vx)_1=x_2^2+2x_1x_3\\(Vx)_2=x_1x_2+2x_2x_3\\(Vx)_3=x_1^2+x_3^2+x_1x_2\end{cases}$

24. $A_6+A_{14}+A_{18}=\begin{cases}(Vx)_1=x_2^2+2x_1x_3\\(Vx)_2=x_3^2+2x_1x_2\\(Vx)_3=x_1^2+2x_2x_3\end{cases}$

$$25.\ A_6+A_{15}+A_{17}=\begin{cases}(Vx)_1=x_2^2+2x_1x_3\\(Vx)_2=2x_1x_2+x_2x_3\\(Vx)_3=x_1^2+x_3^2+x_2x_3\end{cases}$$

$$26.\ A_7+A_{12}+A_{21}=\begin{cases}(Vx)_1=x_3^2+x_1x_2+x_2x_3\\(Vx)_2=x_2^2+x_1x_2+x_1x_3\\(Vx)_3=x_1^2+x_1x_3+x_2x_3\end{cases}$$

$$27.\ A_7+A_{13}+A_{20}=\begin{cases}(Vx)_1=x_3^2+x_1x_2+x_2x_3\\(Vx)_2=x_1x_2+2x_1x_3\\(Vx)_3=x_1^2+x_2^2+x_2x_3\end{cases}$$

$$28.\ A_7+A_{22}+H=\begin{cases}(Vx)_1=x_3^2+x_1x_2+x_2x_3\\(Vx)_2=x_1^2+x_2^2+x_1x_3\\(Vx)_3=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3\end{cases}$$

$$29.\ A_8+A_{11}+A_{22}=\begin{cases}(Vx)_1=x_1x_2+2x_2x_3\\(Vx)_2=x_3^2+x_1x_2+x_1x_3\\(Vx)_3=x_1^2+x_2^2+x_1x_3\end{cases}$$

$$30.\ A_8+A_{13}+A_{19}=\begin{cases}(Vx)_1=x_1x_2+2x_2x_3\\(Vx)_2=x_1x_2+2x_1x_3\\(Vx)_3=x_1^2+x_2^2+x_3^2\end{cases}$$

$$31.\ A_9+A_{13}+A_{18}=\begin{cases}(Vx)_1=x_2^2+x_3^2+x_1x_2\\(Vx)_2=x_1x_2+2x_1x_3\\(Vx)_3=x_1^2+2x_2x_3\end{cases}$$

$$32.\ A_9+A_{21}+H=\begin{cases}(Vx)_1=x_2^2+x_3^2+x_1x_2\\(Vx)_2=x_1^2+x_1x_3+x_2x_3\\(Vx)_3=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3\end{cases}$$

$$33.\ A_{10}+A_{11}+A_{21}=\begin{cases}(Vx)_1=x_2^2+x_1x_2+x_2x_3\\(Vx)_2=x_3^2+x_1x_2+x_1x_3\\(Vx)_3=x_1^2+x_1x_3+x_2x_3\end{cases}$$

$$34.\ A_{10}+A_{13}+A_{17}=\begin{cases}(Vx)_1=x_3^2+x_1x_2+x_2x_3\\(Vx)_2=x_1x_2+2x_1x_3\\(Vx)_3=x_1^2+x_2^2+x_2x_3\end{cases}$$

$$35.\ A_{11}+A_{12}+A_{18}=\begin{cases}(Vx)_1=x_3^2+x_1x_2+x_1x_3\\(Vx)_2=x_2^2+x_1x_2+x_1x_3\\(Vx)_3=x_1^2+2x_2x_3\end{cases}$$

$$36.\ A_{11}+A_{20}+H=\begin{cases}(Vx)_1=x_3^2+x_1x_2+x_1x_3\\(Vx)_2=x_1^2+x_2^2+x_2x_3\\(Vx)_3=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3\end{cases}$$

$$37.\ A_{12}+A_{17}+H=\begin{cases}(Vx)_1=x_2^2+x_1x_2+x_1x_3\\(Vx)_2=x_1^2+x_3^2+x_2x_3\\(Vx)_3=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3\end{cases}$$

Остаются открытыми вопросы о количестве крайних точек при и . Видимо, следующая статья посвящается к описанию о количестве крайних точек при и

Автор выражает искреннюю благодарность проф. Р.Н.Ганиходжаеву за большую помощь при подготовке этой работы и внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Ганиходжаев Р.Н. Исследования по теории квадратичных стохастических операторов, Дис…докт. физ.-мат. наук, Ташкент, 1993.

2. Ганиходжаев Р.Н. К определению квадратичных бистохастических операторов // Успехи мат. наук.т.48, вып 4(292), 1993, С. 231.

3. Ганиходжаев Р.Н. О количестве вершин многогранника бистохастических квадратичных операторов // УзМЖ, 1998, № 6. – С. 29–35.

4. Ганиходжаев Р.Н., Эшниязов А.И. Бистохастические квадратичные операторы // УзМЖ, 2004, № 3. – С. 29–34.

5. Каримов А.З. Решение проблемы Г. Биркгофа для бистохастических квадратичных операторов. // ДАН Р Уз, № 10, 1994. – С. 8–11.

6. Каримов А.З. О выпуклом многограннике бистохастических квадратичных операторов и описание множества его вершин. // УзМЖ, № 4, 1995.– С. 45–52.

7. Шахиди Ф.А. О крайних точках множества бистохастических операторов. Матем. заметки, 2008, том 84, выпуск 3, 475-480.

8. Шахиди Ф.А. О бистохастических операторах, определенных в конечномерном симплексе. Сиб. мат. жур. Новосибирск, 2009,–2.(50). С. 463–469.

9. Birkhoff G. Tres observaciones sobre el algebra liheal // Univ.Nac. Tucuman. Rev. Ser.A 5, 1946. p. 147–151.

10. Ю. И. Любич, Математические структуры в популяционной генетике, Наукова Думка, Киев, 1983.

11. А. Маршалл, И. Олкин, Неравенства: Теория мажоризации и ее приложения, Мир, М., 1983.

12. Харди Г.Г., Литтльвуд Дж.Е., Полиа Г. Неравенства.–М.: ИЛ, 1948.–456 С.