BA'ZI OLIMPIADA MASALALARINI YECHIMDA FUNKSIYANING TADBIQLARI.

Quchqarova Dilnavoz
Chirchiq Davlat Pedagogika Universiteti Qoshidagi Akademik litseyi matematika fani o'qituvchisi

Annotatsiyasi: *Bu ishda funksiyalar va uni qo`llab ba`zi olimpiada misollarini yechish ketma-ketligi keltirilgan. Tenglama va misollarni hisoblashning qulayroq usullari ko`rsatilgan, shu usullardan foydalanib misollar yechilgan, tegishli xulosalar chiqarilgan. Biz [1] adabiyotda keltirilgan usullardan foydalandik.*

Kalit so`zlar: *funksiya ,kvadrat funksiya, tenglama, Eyler funksiyasi, ildiz.*

KIRISH:

Ushbu maqolada bir qarashda qiyin bo`lgan olimpiada misollarini ishlashida qiyinchilik tug`diradigan tenglama va misollarni ishlashda funksiya va uning xossalaridan foydalanib yechish usullari qaraladi.

ASOSIY QISM:

1-Misol. Bizga $x^2-(m+4)x+2m+5=0$ tenglama berilgan bo`lsin va tenglamaning katta ildizi (4;6) intervalda yotadigan bo`lsa m=?

Yechish: Bu masala shartida katta ildizi haqida gap ketganda chizmada ko`rinadiki f(4)<0 va f(6)>0 shartlarni tekshirsak yetarli. Demak, f(4)=16-4(m+4)+2m+5 va f(6)=36-6(m+4)+2m+5 larni topamiz va tengsizlikda tekshiramiz. f(4)=16-4m-16+2m+5<0 va f(6)=36-6m-24+2m+5>0 birinchi tengsizlikdan m>2,5 ikkinchi tengsizlikdan esa m< 4,25 va ularni umumiy yechimini olsak m$\epsilon(2{,}5;4{,}25)$oraliq bo`ladi.Tekshirib ko`ramiz m=4 ni qo`ysak $x^2-8x+13=0$ bu kvadrat tenglamaning yechimini kattasi $4+\sqrt{3}$.Demak javobimiz to`g`ri ekan.

2-Misol. Voleybol bo`yicha Yevro-Afrika chempionatida ishtirok etgan Yevropa jamoalari soni Afrika jamoalari sonidan 9 ta ortiq. Chempionatda istalgan ikkita jamoa o`zaro bir martadan o`yin o`tkazdi.Natijada Yevropa jamoalari birgalikda Afrika jamoalari birgalikda to`plagan ochkodan 9 marta ko`p ochko to`pladi (bunda g`olib jamoaga 1 ochko, mag`lub jamoaga 0 ochko berildi) Afrikalik bitta jamoa ko`pi bilan nechta ochko to`plagan bo`lishi mumkin?

Yechish: Chempionatda Afrikadan x ta jamoa qatnashgan bo`lsin. U holda Afrikalik jamoalar o`zaro $\frac{(x-1)x}{2}$ ta o`yin o`tkazishdi va ular to`plagan umumiy ochkolar $\frac{(x-1)x}{2}+k$ bo`ladi, bu yerda k-Yevropa jamoalari ustidan qozonilgan g`alabalar soni. Shuningdek, Yevropa jamoalari to`plagan ochkolar

Soni $\frac{(x-8)(x+9)}{2}+x(x+9)-k$ bo`ladi. U holda , masala shartiga ko`ra

$9(\frac{(x-1)x}{2}+k)=\frac{(x-8)(x+9)}{2}+x(x+9)-k.$

Tenglamani hosil qilamiz. Undan $3x^2-11x+10k-36=0$ Oxirgi tenglamaning diskriminanti D=121-3(10k-36)=229-30k to\`la kvadrat bo\`lishi zarur, chunki $x\epsilon N$, k=2 VA k=6 bo\`lganda D to\`la kvadrat bo\`ladi. Agar k=2 bo\`lsa, u holda x=8 bo\`ladi va Afrikaning eng yaxshi jamoasi (x-1)+k=7+2=9 ochko yig\`ishi mumkin. Agar k=6 bo\`lsa, u holda x=6 bo\`ladi va Afrikaning eng yaxshi jamoasi ko\`pi bilan (x-1)+k=5+6=11 ochko to\`playdi.

3-Misol: a, b, c, d haqiqiy sonlar uchun $\begin{cases} a+b+c+d=20 \\ ab+ac+ad+bc+bd+cd=150 \end{cases}$ bo\`lsa

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}$ ni toping.

Yechish: Birinchi tenglikni kvadratga oshirsak quyidagi tenglikni olamiz.

$a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd=400$,

Ikkinchi tenglikni inobatga olib quyidagini olamiz

$\begin{cases} a^2+b^2+c^2+d^2=100 \\ a+b+c+d=20 \end{cases} => \begin{cases} a^2+b^2+c^2+d^2=100 \\ 10a+10b+10c+10d=200 \end{cases}$

Hamda quyidagini olamiz.

$a^2-10a+25+b^2-10b+25+c^2-10c+25+d^2-10d+25=0;(a-5)^2+(b-5)^2+(c-5)^2+(d-5)^2=0$

bundan ko\`rinib turibdiki a=b=c=d=5 va o\`rniga qo\`ysak $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}$=0,8.

4-Misol: Doskaga dastlabki 2022 ta natural son yozilgan. Zafar har qadamda ixtiyoriy ikkita a va b natural sonni o\`chirib o\`rniga ab+a+b sonini yozadi. Ma\`lumki 2021 qadamdan keyin doskada bitta son qoladi. Shu sonni toping.

Yechish: 1, 2, …, 2022 sonlari yozilgan, ixtiyoriy a va b sonlarni o\`chirsak o\`rniga ab+a+b=(a+1)(b+1)-1 soni yoziladi. c va (a+1)(b+1)-1 ni o\`chirilsa (c+1)((a+1)(b+1)-1+1)-1=(a+1)(b+1)(c+1)-1 soni yoziladi. (c+1)(d+1)-1 va (a+1)(b+1)-1 sonlari o\`chirilsa o\`rniga ((c+1)(d+1)-1+1)((a+1)(b+1)-1+1)-1=(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)-1 yoziladi. Demak ixtiyoriy ikkita $(a_1+1)(a_2+1)\dots(a_k+1)-1$ va $(b_1+1)(b_2+1)\dots(b_n+1)-1$ sonlari o\`chirilsa o'rniga $(a_1+1)(a_2+1)\dots(a_k+1)(b_1+1)(b_2+1)\dots(b_n+1)-1$ soni yoziladi. Bundan ko\`rinib turibdiki oxirida (1+1)(2+1)(3+1)……(2022+1)-1 soni qoladi ya\`ni 2023!-1 qoladi.

5-Misol: Ixtiyoriy $x\epsilon R$ uchun $f(2011x+f(0))=2011x^2$ tenglikni qanoatlantiruvchi f: R→R funksiyalarning barchasini toping.

Yechish: $x\epsilon R$, $f(2011x+f(0))=2011x^2$, x=0 bo\`lsin u holda f(f(0))=0 bo'ladi va agar f(0)=c deb olsak unda f(c)=0 ⇒ $f(2011x+c)=2011x^2$ bo'ladi.

$x=-\frac{c}{2011}$ ⇒ $f(0)=2011\cdot\frac{c^2}{2011^2}=\frac{c^2}{2011}=c$ ⇒ c=0, c=2011

1) c=0 ⇒ $f(2011x)=2011x^2$

$x=\frac{y}{2011}$ ⇒ $f(y)=\frac{y^2}{2011}$ ⇒ $f(x)=\frac{x^2}{2011}$.

2) c=2011 ⇒ $f(2011x+2011)=2011x^2$

$x=\frac{y}{2011}-1$ ⇒ $f(y)=2011(\frac{y}{2011}-1)^2$, ⇒ $f(x)=\frac{(x-2011)^2}{2011}$.

Javob: $f(x)=\frac{x^2}{2011}$; $f(x)=\frac{(x-2011)^2}{2011}$.

6-Misol: F(x)=$a^2\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+b^2\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}+c^2\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$ funksiya berilgan f(2) va f`(-2) ni toping.

Yechish: Bu funksiyadan ko`rinib turibdiki (a-b)(a-c)(b-c)≠0

shart bo`lishi kerak va bizdan so`ralgan narsa funksiyaning 2 dagi qiymati va hosilasining -2 dagi qiymatlari so`ralgan. Agar to`g`ridan-to`g`ri hosila olib ishlaydigan bo`lsak ancha vaqtimizni yo`qotamiz.Demak, e`tibor berib qaraydigan bo`lsak kvadrat funksiyalar hosil bo`lmoqda.

f(x)=Ax^2+Bx+C

ko`rinishdagi kvadrat funksiya deb tasavvur qilamiz.

x ni o`rniga avval a ni qo`ysak f(a)=a^2, x=b bo`lsa f(b)=$b^2$, x=c bo`lganda esa f(c)=c^2 hosil bo`ladi

$$\begin{cases} f(a) = a^2 \\ f(b) = b^2 \\ f(c) = c^2 \end{cases}$$

bizga ma`lumki har qanday kvadrat funksiyani uchta nuqtasi berilgan bo`lsa har qanday kvadrat funksiyani topamiz va u yagona chiqadi. Demak bizda ushbu shartni qanoatlantiruvchi kvadrat funksiya f(x)=x^2 bundan A=1, B=0, C=0 ekan ko`rinib turibdiki sodda ko`rinishga keldi kvadrat funksiyamiz va bizdan so`ralayotgan narsalarni topib qo`ysak bo`ldi, ya`ni f(2)=4, hosilasini olsak f`(x)=2x, f`(-2)=-4 bo`lar ekan.

7-Misol. F(x)=$a\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+b\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}+c\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$

funksiya berilgan f(2) va f`(-2) ni toping.

Yechish: Bu misol ham yuqoridagi misolga o`xshash misol bo`lib bunda ham

(a-b)(a-c)(b-c)≠0

shart qo`yiladi. Bu misolda agar kvadrat funksiya desak A>0 bo`lishi kerak edi shuning uchun A ni ixtiyoriy tanlash uchun kvadrat uchxad

f(x)=Ax^2+Bx+C

x=a bo`lganda f(a)=a, x=b da f(b)=b, x=c da f(c)=c hosil bo`ladi.$\begin{cases} f(a) = a \\ f(b) = b \\ f(c) = c \end{cases}$

Bundan funksiya ko`rinishi f(x)=x da bo`lar ekan A=0, B=1 va C=0. Endi bizdan so`ralgan narsani topadigan bo`lsak f(2)=2,hosila oladigan bo`lsak f`(x)=1 bundan endi x ga bog`liq emas bo`lib qoladi va f`(-2)=1 bo`ladi.Endi bu misollarni uchinchi tipi bor uni ko`rib chiqsak.

8-Misol:$x^2-(m+4)x+2m+5=0$ va

$x_1<3<x_2$ bo`lsa, m=?

Yechish: Bu tenglamani yechish uchun kvadrat funksiya deb olamiz, ya`ni $f(x)=x^2-(m+4)x+2m+5$. Endi buni bittalab ishlab o`tirsak ham vaqt ham bu misol juda muommoli misolga aylanib ketadi shuning uchun f(3)<0 shartni tekshirib qo`ysak bo`ldi.

$$f(3) = 3^2 - 3(m+4) + 2m + 5 < 0$$

Ishlaganimizda m>2 dan javobi kelib chiqadi, ya`ni $(2; \infty)$.

9-Misol: 7^{999}soninng oxirgi uchta raqamini toping.

Yechish: 7^{9999}sonining oxirgi uchta raqamini toping.

Yechish: 7^{9999}sonining oxirgi uchta raqamini topish bilan 1000 ga bo`lganda qoladigan qoldiq bir xil bo`lgani uchun 1000 ga bo`lganda necha qoldiq qolishini aniqlashga o`xshab ishlaymiz. $7^{9999} \equiv y(mod\, 1000)$ buni, quydagicha ishlaymiz, avval

(9999;1000)=1;$\varphi(1000) = 1000 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right) = 400$ bo`ldi.

$7^{400} \equiv 1(mod\, 1000) \rightarrow (7^{400})^{25} \equiv 1(mod\, 1000)$.

$7^{9999} \cdot 7 = 7^{10000}$ni beradi va bu

$7^{10000} \equiv 1(mod\, 1000)$ ekanidan foydalanamiz

$$7^{10000} \equiv y \cdot 7(mod\, 1000)$$

Qanday sonni 7 ga ko`paytirsak 1000 ga bo`lganda 1 qoldiq qoladigan son hosil bo`ladi, avval 1000 ga bo`lsa 1 qoldiq qoladigan sonlar 1, 1001, 2001,...... ni ichidan 7 ga bo`linadigani kerak bu son 1001 uni 7 ga bo`lsak 143 chiqadi. Demak bundan ko`rinib turibdiki y=143 ekan. Bizdan so`ralgan 7^{9999} soninig oxirgi uchta raqami 143 ekan.

XULOSA

Matematika bo`yicha olimpiadaga tayyorlanayotgan o'quvchilargani misol va tenglamalarni ishlashda funksiyalarni qo`llab ishlash ham qulaylik, ham vaqtni tejash imkonini beradi.Funksiyalarni nafaqat olimpiada masalalarini yechishda balki abituryentlar ham oliy o'quv yurtlariga kirish imtihonlariga tayyorgarlikda foydalansa qo`llasa qulayliklarga olib keladi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI:

1. A.S.Yunusov, S.I.Afonina, M.A.Berdiqulov, D.I.Yunusova, "Qiziqarli matematika va olimpiada masalalari" O`qituvchi-2007.
2. Ayupov SH.A, Rixsiyev B.B,Qo'chqorov O.SH."Matematika olimpiadmasalalari II qism T 2004
3. "Fizika, matematika va informatika" jurnali.2017-yil ;
4. Ismoilov Sh.N "Sonlar nazariyasi" , Toshkent -2008;
5. Internet saytlari ziyonet.com