UCHBURCHAKNING YUZINI HISOBLASHGA OID ASOSIY FORMULALAR VA ULARNING ISBOTLARI

Abdullayeva Dilnoza Mahmarejab qizi
O'zbekiston-Finlandiya pedagogika instituti
Matematika va Informatika yo'nalishi
207-guruh talabasi
Ilmiy rahbar: **Raximov Nasriddin Nomozovich**

Annotatsiya: *Mazkur maqolada uchburchakning yuzasini topishga oid asosiy formulalar va ularning isboti keltirilgan. Hozirgi kunda fan olimpiadalarida ko'proq formulalar va ularning kelib chiqishi savol tariqasida berilmoqda.*

Kalit so'zlar: *uchburchak, to'g'ri chiziq, nuqta, kesma, burchak, yuza, asos, balandlik, mediana, Geron formulasi.*

Uchburchak-bir to'g'ri chiziqda yotmagan uchta nuqta va uchlari shu nuqtalarda bo'lgan uchta kesmadan yasalgan figura.Berilgan nuqtalar uchburchakning uchlari, uchlarini tutashtiruvchi kesmalar uchburchakning tomonlari, tomonlari orasidagi uchta burchaklar esa uchburchakning burchaklari deyiladi. Geometriyada uchburchak uch qirrali va uchta cho'qqidan tashkil topgan uch qirrali ko'pburchakdir. Uchburchakning eng muhim xususiyati shundaki, uchburchakning ichki burchaklarning yig'indisi 180 gradusga tengligidir. Bu xususiyat uchburchakning burchak yig'indisi xossasi deyiladi. Agar ABC uchburchak bo'lsa, u ΔABC sifatida belgilanadi va bu yerda A, B va C uchburchakning uchlari. Yuqorida aytib o'tganimizdek, uchburchak ko'pburchakning bit turi bo'lib, uning uch tomoni bor va ikki tomoni uchi birlashtirilib, uchburchakning cho'qqisi deyiladi. Ikki tomon o'rtasida esa burchak hosil bo'ladi. Bu geometriyaning muhim qismlaridan biridir.Pifagor teoremasi va trigonometriya kabi ba'zi asosiy tushunchalar uchburchak xususiyatiga bog'liq. Uchburchak burchaklari va tomonlariga qarab har xil turlarga ega.

Uchburchakning burchaklari-uchburchakda uchta burchak bor. Bu burchaklar uchburchakning uch tomoni deb nomlanuvchi umumiy nuqtada uchrashadigan ikki tomondan hosil bo'ladi. Agar yon uzunligini tashqariga uzatsak, u holda tashqi burchak hosil bo'ladi. Uchburchakning ketma-ket ichki va tashqi burchaklarining yig'indisi to'ldiruvchidir.

Uchburchakning xususiyatlari. Matematikada har bir shakl ularni bir-biridan ajratib turadigan o'ziga xos xususiyatlarga ega.

• Uchburchakning uch tomoni va uchta burchagi bor.

• Uchburchak burchaklarining yig‘indisi har doim 180 gradusga teng.

• Uchburchakning tashqi burchagi o‘ziga qo‘shni bo‘lmagan ikkita ichki burchaklar yig‘indisiga teng.

• Uchburchakning tashqi burchaklari yig‘indisi 360 gradusga teng

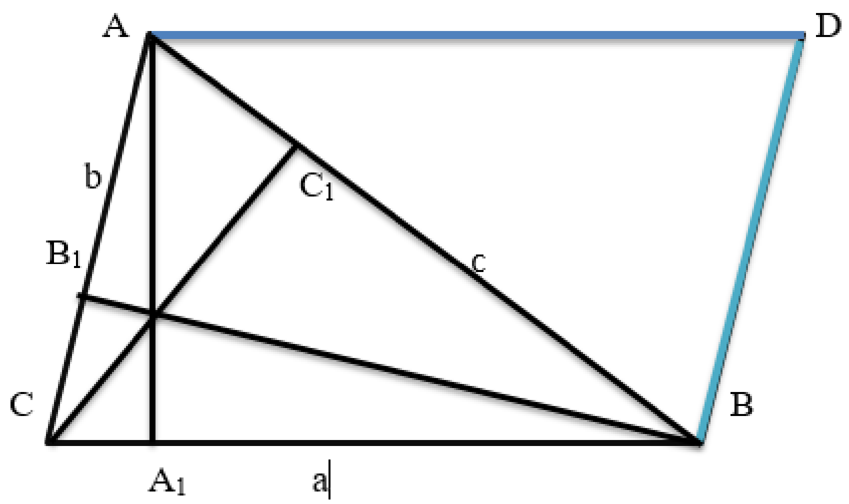
• Uchburchakning istalgan ikki tomonining uzunliklari yig‘indisi uchinchi tomonining uzunligidan kata. Xuddi shunday, uchburchakning istalgan ikki tomoning uzunliklari orasidagi farqi uchinchi tomoning uzunligidan kichikdir.

• Eng qisqa tomon har doim eng kichik ichki burchakka qarama-qarshidir. Xuddi shunday, eng uzun tomon har doim eng kata ichki burchakka qarama-qarshidir.

Geometriyada eng muhim tushunchalardan biri bo‘lgan uchburchakning yuzi masalasiga to‘xtalamiz. Haqiqatan yuza tushunchasi juda ham muhim ahamiyatga ega. Ayniqsa uchburchakning yuzini topishga oid bir qancha ifodalar mavjud. Bu ifodalar yordamida uchburchakning yuzasini hisoblash mumkin. Berilgan ifodalar turli ko‘rinishda bo‘ladi va ulardan foydalanishda uchburchakning turiga va berilgan parametrlariga e’tibor qaratiladi.

Teorema. Uchburchakning yuzi uning asosi bilan balandligi ko‘paytmasining yarmiga teng.

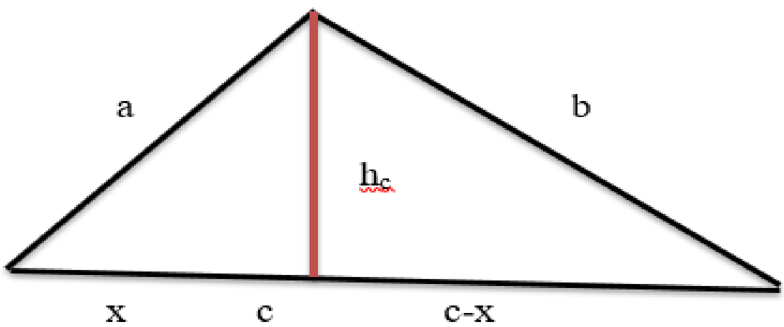
Isboti. Bizga ABC uchburchak berilgan bo‘lsin.



ABC uchburchakni ADBC paralellogramgacha to‘ldiramiz, bizga ma’lumki paralellogramning yuzi $\boldsymbol{S_{ADBC} = CB \cdot AA_1 = a \cdot a_h}$ bo‘ladi. Paralellogramning diagonali uni ikkita teng yuzali uchburchakka ajratganligi uchun, ABC uchburchakning yuzi paralellogram yuzining yarmiga teng ekanligi kelib chiqadi. Demak, $S_{ABC} = \frac{1}{2}S_{ADBC} = \frac{1}{2}a \cdot h_{\text{a}}$. Teorema isbot bo‘ldi.

Shuningdek, bu formulaning isbotini to‘g‘ri to‘rtburchak misolida ham ko‘rishimiz mumkin. Asosiy tushuncha: Uchburchak unga tashqi chizilgan to‘g‘ri to‘rtburchakdan ikki marta kichik bo‘lganligi sababli uchburchakning yuzasi asos va balandlikning ko‘paytmasining yarmiga teng. Uchburchakning yuzini hisoblashda yana ko‘plab formulalardan foydalaniladi. Biz quyida bir nechta formulalarning isbotini keltirib o‘tamiz.

Biz juda ham ko‘p foydalaniladigan Geron formulasining isboti bilan tanishamiz.Tomonlar *a b c* bo‘lgan uchburchak berilgan bo‘lsin. c tomonga h_c balandlik tushuramiz.



$$\boxed{P = \frac{a+b+c}{2}}$$

Endi bizga noma’lum bo‘lgan x ni qolgan uchta tomon orqali ifodalaymiz. Pifagor teoremasiga ko‘ra:

$$h_c^2 + x^2 = a^2$$

$h_c^2 + (c-x)^2 = b^2$ endi bu sistemani yechish uchun birinchi tenglamadan ikkinchi tenglamani ayiramiz.

$$h_c^2 + x^2 - h_c^2 - c^2 - 2cx - x^2 = a^2 - b^2$$

$2\text{cx} = a^2 - b^2 + c^2$ $\qquad x = \frac{a^2-b^2+c^2}{2c}$

$$h_c^2 = a^2 - (\frac{a^2-b^2+c^2}{2c})^2$$

$$h_c^2 = (a - \frac{a^2-b^2+c^2}{2c}) \cdot (a + \frac{a^2-b^2+c^2}{2c}$$

$$h = \sqrt{\frac{\boxed{-a^2+b^2-c^2+2ac}}{2c}} \cdot \sqrt{\frac{\boxed{a^2-b^2+c^2+2ac}}{2c}}$$

$$h = \frac{1}{2c}\sqrt{b^2-(a-c)^2 \cdot (a+c)^2 - b^2)}$$

$$h = \frac{1}{2c}\sqrt{(b-a+c)\cdot(b+a-c)\cdot(a+c-b)\cdot(a+b+c)}$$

$$h = \frac{1}{2c}\cdot 4\cdot\sqrt{(\frac{a+b+c}{2})\cdot(\frac{b+c-a}{2})\cdot(\frac{a+c-b}{2})\cdot(\frac{a+b-c}{2})}$$

$$h = \frac{2}{c}\cdot\sqrt{(\frac{a+b+c}{2})\cdot(\frac{a+b+c}{2}-a)\cdot(\frac{a+b+c}{2}-b)\cdot(\frac{a+b+c}{2}-c)}$$

$$h = \frac{2}{c}\cdot\sqrt{p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)}$$

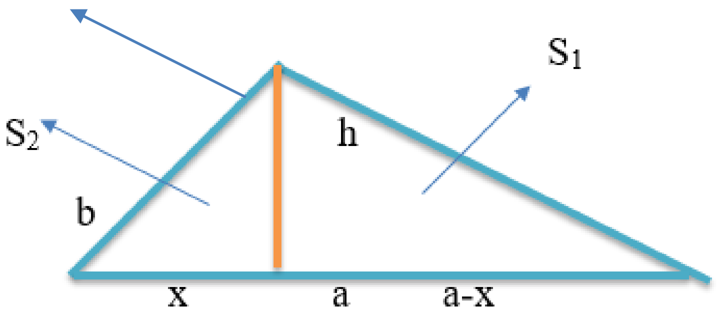
Endi yuqoridagi ta’rifga ko‘ra uchburchakning yuzi asosiga tushurilgan balandlik bilan asosning ko‘paytmasiga teng.

$$\boxed{S = c\cdot\frac{h}{2} = \frac{c}{2}\cdot\frac{2}{c}\cdot\sqrt{p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)}}$$

yordamida hisoblash.

Bizga tomonlari a va b bo‘lga

$$\boxed{S = \frac{a\cdot b}{2}\cdot\sin\alpha}$$



Bizga berilgan a va b tomonlar o‘rtasidagi burchak α bo‘lsin. Uchburchakning yuzi **S_1+S_2=S∆**

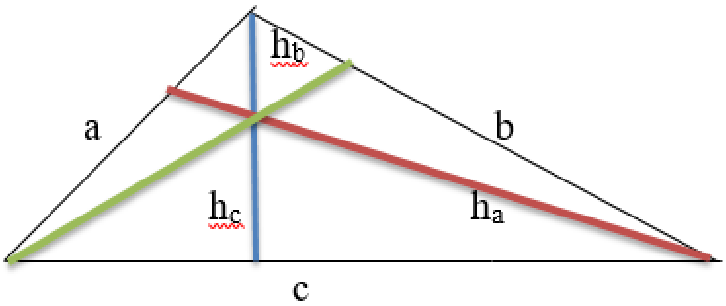
$S_1 = \frac{x\cdot h}{2}$ $\quad$ $S_2 = \frac{(a-x)\cdot h}{2}$ $\quad$ $h = b\cdot\sin\alpha$ $S_\Delta = S_1 + S_2$

$$S_\Delta = \frac{h\cdot x}{2} + \frac{(a-x)\cdot h}{2} = \frac{a\cdot h}{2}$$

$h = b \cdot \sin\alpha$ ekanligidan foydalansak, formula isbotlandi.

$$\boxed{S_{\Delta} = \frac{a \cdot b}{2} \cdot \sin\alpha}$$

Uchburchak y ... nda hisoblash.
Bizga tomonlar a b va c bo‘lgan uchburchak berilgan bo‘lsin.



Bu yerda h_a h_b va h_c mos a b va c tomonlarga tushirilgan balandliklar.

$$S = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2}$$

$$a = \frac{2S}{h_a} \quad b = \frac{2S}{h_b} \quad c = \frac{2S}{h_c}$$

Endi biz uchburchakni yuzini hisoblashda Geron formulasidan foydalanamiz.

$$S = \sqrt{(\frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{c}{2})(\frac{b}{2} + \frac{c}{2} - \frac{a}{2})(\frac{a}{2} + \frac{c}{2} - \frac{b}{2})(\frac{a}{2} + \frac{b}{2} - \frac{c}{2})}$$

Bu yerda almashtirishlardan foydalanamiz ya’ni:

$$\frac{a}{2} = \frac{S}{h_a} \qquad \frac{b}{2} = \frac{S}{h_b} \qquad \frac{c}{2} = \frac{S}{h_c}$$

endi bu ifodalarni yuqoridagi formulaga qo‘yamiz.

$$S = \sqrt{(\frac{S}{h_a} + \frac{S}{h_b} + \frac{S}{h_c})(\frac{S}{h_b} + \frac{S}{h_c} - \frac{S}{h_a})(\frac{S}{h_a} + \frac{S}{h_c} - \frac{S}{h_b})(\frac{S}{h_a} + \frac{S}{h_b} - \frac{S}{h_c})}$$

Kelib chiqqan formuladan S larni umumiy ko‘paytuvchi qilib qavsdan tashqariga chiqaramiz va soddalashtirishlarni amalga oshiramiz.

$$S = S^2\sqrt{(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c})(\frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_a})(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_b})(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c})}$$

Berilgan ifodadan S ni topsak,

$$S=\frac{1}{\sqrt{(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c})(\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_a})(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_b})(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}-\frac{1}{h_c})}}$$

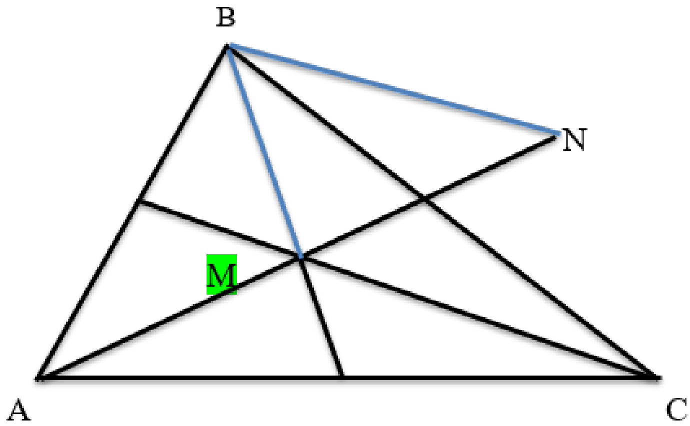
demak, formula isbot bo‘ldi.

Bizga ABC uchburchak berilgan bo‘lib uning yuzini topish talab etilsin.

Berilgan: uchburchakning mos tomonlariga tushurilgan medianalar. Demak, uchburchakning yuzini medianalariga ko‘ra topish uchun formuladan foydalanamiz.

$$S=\frac{4}{3}\sqrt{m(m-m_a)(m-m_b)(m-m_c)}$$

Bu formulani isbotlash uchun bizga ABC uchburchak berilgan bo‘lsin.Uning tomonlariga mos ravishda m_a m_b m_c medianalarni o‘tkazib, medianalar kesishgan M nuqtani BC tomonning o‘rtasiga nisbatan simmetrik ko‘chiraylik. Quyidagi chizmada BMNC to‘rtburchak va BMN uchburchak paydo bo‘ladi.



BMN uchburchakning tomonlari mos ravishda

$BM=\frac{2}{3}m_b$ $BN=\frac{2}{3}m_c$ $MN=\frac{2}{3}m_a$ o‘lchamlarga ega.

ABC uchburchakning BC tomoni BMN uchburchakni ikkita tengdosh shakllarga ajratadi. BMN uchburchakning yuzini Geron formulasi yordamida topamiz.

$$p=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(m_a+m_b+m_c)$$

$$S_{BMN}=\sqrt{p\left(p-\frac{2}{3}m_a\right)\left(p-\frac{2}{3}m_b\right)\left(p-\frac{2}{3}m_c\right)}=$$

$$=\sqrt{\frac{m_a+m_b+m_c}{3}\cdot\frac{m_a+m_b-m_c}{3}\cdot\frac{m_b+m_c-m_a}{3}\cdot\frac{m_a+m_c-m_b}{3}}$$

$$= \frac{1}{9}\sqrt{(m_a + m_b + m_c)(m_a + m_b - m_c)(m_b + m_c - m_a)(m_a + m_c - m_b)}$$

Agar $m = \frac{m_a+m_b+m_c}{2}$ ko‘rinishida belgilash kiritsak ushbu ifoda hosil bo‘ladi.

$$S = \frac{4}{9}\sqrt{m(m - m_a)(m - m_b)(m - m_c)}$$

BMN uchburchakning yuzining yarmi ABC uchburchak yuzining $\frac{1}{6}$ qismiga teng ekanligidan

$$S_{ABC} = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9}\sqrt{m(m - m_a)(m - m_b)(m - m_c)} = \frac{4}{3}\sqrt{m(m - m_a)(m - m_b)(m - m_c)}$$

bo‘lishi kelib chiqadi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR:

1. “Geometriya: keng qamrovli kurs” Den Peode.
2. “Elementlar” (geometriya bo‘yicha klassik asar) Evklid
3. “Matematik olimpiadalarda Evklid geometriyasi” Evan Chen.
4. “Planimetriyadan hisoblashga va isbotlashga doir tanlangan masalalar” Obid Karimiy “O‘qituvchi” nashriyoti. Toshkent-1965y.