IKKINCHI TARTIBLI SIRTLAR, ELLIPSOID VA GIPERBOLOID.

Fayzullayeva Fayzinisso
O'ktamboyeva Muhlisa
Namangan davlat universiteti Matematika fakulteti Amaliy matematika yo'nalishi 1-bosqich talabalari
Maxsudova Shohsanam
Ilmiy rahbar:Namangan davlat universiteti Algebra va matematika o'qitish metodikasi kafedrasi o'qituvchisi

Annostatsiya: *Ushbu maqolada chiziqli algebra va analitik geometriya fanidan bizga muhim bo'lgan fazodagi ikkinchi tartibli sirtlar to'g'risida bayon qilindi . Bunda ikkinchi tartibli sirtlardan ellipsoid , giperboloit va bir pallali giperboloit tenglamalari va grafigi ko'rsatilib o'tildi.*

Kalit so'zlar:*Ikkinchi tartibli sirtlar, ellipsoid, giperboloid, bir pallali giperboloit, markazli, markazsiz, diskriminant.*

Uch o'lchovli $Oxyz$ Dekart sistemasida har qanday sirt biror $F(x,y,z)$=0 tenglama bilan yoziladi, bu yerda tenglama bilan yoziladi, bu yerda (x,y,z)- sirt ixtiyoriy nuqtasining koordinatasi. Agar $F(x,y,z)$- x,y,z o'zgaruvchilarga nisbatan ikkinchi darajali ko'phad bo'lsa, u holda $F(x,y,z)$=0 tenglama ikkinchi tartibli tenglama deyiladi, shu tenglama yordamida tasvirlanadigan sirt esa *ikkinchi tartibli sirt* deyiladi. Ya'ni x,y,z o'zgaruvchi Dekart koordinatalariga nisbatan ikkinchi darajali algebraic tenglamalar bilan ifodalangan *ikkinchi tartibli sirt* deyiladi.Ikkinchi tartibli sirtni ifodalaydigan ikkinchi darajali tenglamaning umumiy ko'rinishi quyidagicha bo'ladi:

$$A_1x^2 + A_2y^2 + A_3z^2 + B_1xy + B_2xz + B_3yz + C_1x + C_2y + C_3z + F = 0$$

$A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3\ F \in R$ bo'lib ulardan ba'zilari 0 ga teng bo'lishi mumkin.

Hisoblashlarda qulaylik keltirish maqsadida ikkinchi darajali chiziqlqrning umumiy tenglamasini quyidagi ko'rinishda yozamiz

$$A_1x^2 + A_2y^2 + A_3z^2 + 2B_1xy + 2B_2xz + 2B_3yz + 2C_1x + 2C_2y + 2C_3z + F = 0 \qquad (1)$$

Koordinatalar sistemasini almashtirish orqali (1) tenglamani soddalashtirib $A_1x^2 + A_2y^2 + A_3z^2 + F = 0$ (2) markazli va $A_1x^2 + A_2y^2 + C_3z = 0\ (3)$ markazsiz ko'rinishga keltirish mumkin.

Ikkinchi tenglama bialn ifodalangan sirt ikkinchi tartibli markazli sirt.Uchinchi tenglama bilan ifodalangan sirt esa ikkinchi tartibli markazsiz yoki markazi cheksiz uzoqlikda joylashgan sirt deyiladi.

Bizga ikkinchi tartibli markazli sirt berilgan bo'lsin

$$A_1x^2 + A_2y^2 + A_3z^2 + F = 0$$

Bunda F ning ishorasi qolgan koeffitsentlar ishorasiga qarama-qarshi bo'lsin. U holda tenglamani quyidagicha yozamiz.

$A_1x^2 + A_2y^2 + A_3z^2 = -F / \div$ (-*F*)

$$\frac{A_1x^2}{-F} + \frac{A_2y^2}{-F} + \frac{A_3z^2}{-F} = 1 \; yoki \; \frac{x^2}{\frac{-F}{A_1}} + \frac{y^2}{\frac{-F}{A_2}} + \frac{z^2}{\frac{-F}{A_3}} = 1 \qquad (4)$$

Yuqoridagi fazoga ko'ra mahrajlari musbat bo'ladi .Ya'ni

$\begin{cases} \frac{-F}{A_1} > 0 \\ \frac{-F}{A_2} > 0 \\ \frac{-F}{A_3} > 0 \end{cases}$ shuning uchun $\begin{cases} \frac{-F}{A_1} > a^2 \\ \frac{-F}{A_2} > b^2 \\ \frac{-F}{A_3} > c^2 \end{cases}$ (5) deb belgilab olamiz.

(5) ni (4) tenglamaga qo'ysak $\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1}$ (6)

tenglama kelib chiqadi .

1-tarif. Ikkinchi tartibli sirt tenglamasini birorta dekart koordinatalari sistemasida

$$\frac{\mathrm{x}^2}{\mathrm{a}^2} + \frac{\mathrm{y}^2}{\mathrm{b}^2} + \frac{\mathrm{z}^2}{\mathrm{c}^2} = 1$$

ko'rinishda yozish mumkin bo'lsa ,u ellipsoid deb ataladi.

Bu tenglamada a≥b≥c>0 munosabat bajarilishi talab qilinadi.

Ellipsoid tenglamasidan ko'rinib turibdiki , u koordinata o'qlariga nisbatan simmetrik joylashgan, koordinata boshi esa uning simmetriya markazidir.

Ellipsoidning shaklini chizish uchun uning koordinata tekisliklariga parallel tekisliklar bilan kesimini qaraymiz. Masalan, uni *z=h* tenglama bilan aniqlangan tekislik bilan kessak |*h*|<*c* bo'lganda kesimda

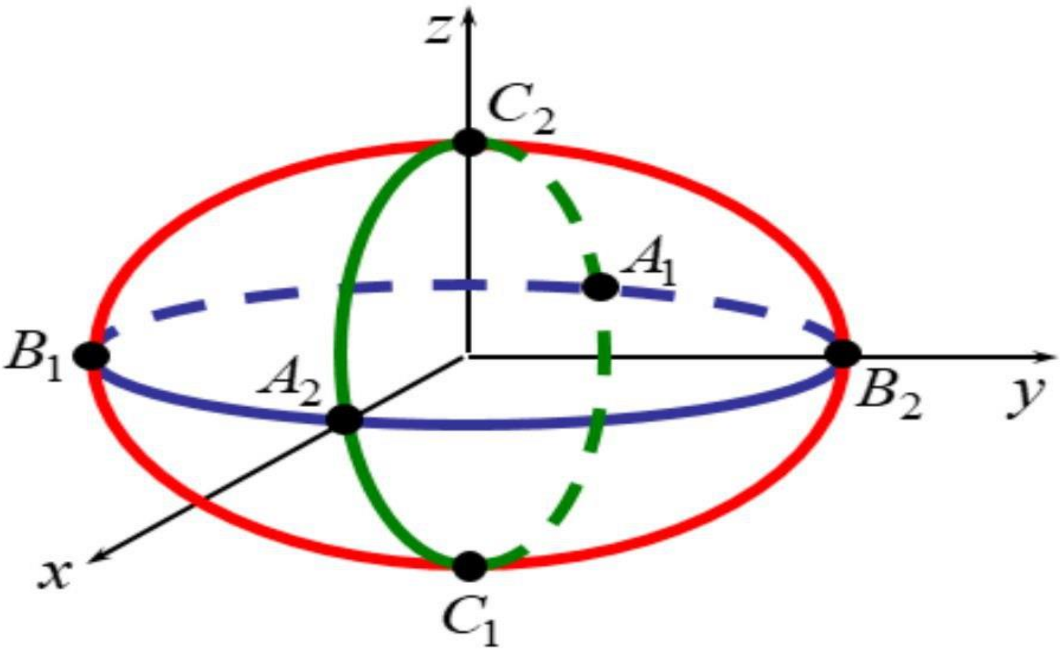
$$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2}}$$

Tenglama bilan aniqlanuvchi ellips hosil bo'ladi.Bu tenglamani

$$\frac{x^2}{\left(a*\sqrt{1-\frac{\boldsymbol{h^2}}{\boldsymbol{c^2}}}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(b*\sqrt{1-\frac{\boldsymbol{h^2}}{\boldsymbol{c^2}}}\right)^2}=1$$

ko'rinishda yozish mumkin.

Xuddi shunday , ellipsoidning $0xy, 0yz$ tekkisliklariga parallel tekisliklar bilan kessak kesimda ellipslar hosil bo'ladi.Yuqoridagilarni hisobga olib , ellipsoidni chizmada tasvirlashimiz mumkin.



2*-tarif. *Ikkinchi tartibli tenglamasini birorta dekart koordinatalar sistemasida

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1} \quad \textbf{(7)}$$

ko'rinishda yozish mumkin bo'lsa, u ikki pallali giperboloid deb ataladi.Bu tenglamada a≥b≥c>0 ,c>0 munosabat bajarilishi talab qilinadi .

Ikki pallali giperboloid tenglamasidan ko'rish mumkinki, uchinchi o;zgaruvchi $z \leq c$ va z ***≥c*** tengliklarni qanoatlantirishi kerak.Demak,ikki pallali giperboloid ikki qismdan iborat va uning nomi shakliga mosdir. Agar ikki pallali giperboloid *z=h* tenglama bilan aniqlangan tekislikda kessak, |h|>c bo'lganda kesimda

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2}-1}$$

tenglama bilan aniqlanuvchi ellips hosil bo'ladi.Bu ellipsning yarim o'qlari mos ravishda

$$a\sqrt{\frac{\boldsymbol{h^2}}{\boldsymbol{c^2}}-\mathbf{1}}, \qquad b\sqrt{\frac{\boldsymbol{h^2}}{\boldsymbol{c^2}}-\mathbf{1}}$$

kattaliklarga tengdir.

Agar ikki pallali giperboloidning x=*y* tenglama bilan aniqlangan tekislikda kessak, har qanday *h* uchun kesimda

$$\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=\frac{h^2}{b^2}+1$$

tenglama bilan aniqlanuvchi giperbola hosil bo'ladi. Bu giperbolaning yarim o'qlari mos ravishda

$$c\sqrt{1+\frac{h^2}{b^2}}, \qquad a\sqrt{1+\frac{h^2}{b^2}}$$

kattliklarga tengdir

Xuddi shunday ikki pallali giperboloidlarni *x*=*h* tenglama bilan aniqlangan tekislikda kessak ,har qanday *h* uchun

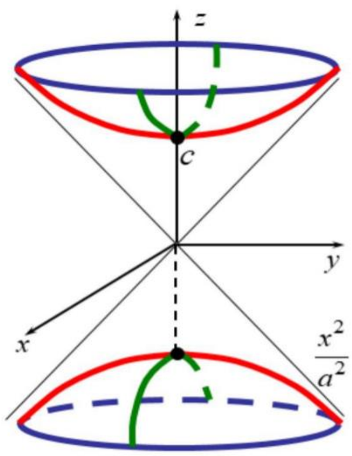
$$\frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{a^2}+1$$

tenglama bilan aniqlanuvchi giperbola hosil bo'ladi . Bu giperbolaning yarim o'qlari mos ravishda

$$c\sqrt{1+\frac{h^2}{b^2}}, \qquad b\sqrt{1+\frac{h^2}{a^2}}$$

kattaliklarga tengdir.

Bundan tashqari (7) tenglamadan ko'rish mumkinki, giperboloid koordinata tekisliklariga nisbatan simmetrik joylashgan, koordinata boshi esa uning simmetriya markazi bo'ladi. Bularni hisobga olib, uni chizmada tasvirlashimiz mumkin.



3-tarif. Ikkinchi tartibli sirt tenglamasini birorta dekart koordinatalari sistemasida

$$\frac{\boldsymbol{x^2}}{\boldsymbol{a^2}}+\frac{\boldsymbol{y^2}}{\boldsymbol{b^2}}-\frac{\boldsymbol{z^2}}{\boldsymbol{c^2}}=\mathbf{1}$$

ko'rinishida yozish mumkin, u bir pallali giperboloid deb ataladi.Bu tenglamada a≥b>0 ,c>0 munosabat bajarilishi talab qilinadi.

Bir pallali giperboloidning tenglamasidan ko'rish mumkinki , u koordinata tekisliklariga nisbatan simmetrik joylashgan, koordinata boshi esa uning simmetrya markazi bo'ladi. Bir pallali giperboloidni z=h tenglama bilan aniqlangan tekislik bilan kessak , har qanday h uchun kesimda

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2}+1$$

tenglama bilan aniqlanuvchi ellips hosil bo'ladi. Bu ellipsning yarim o'qlariga mos ravishda

$$a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}},\quad b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$$

kattaliklarga tengdir.Agar *h=0* bo'lsa , kesimda eng kichkina ellips hosil bo'ladi.Bu ellips bir pallali giperboloidning bo'g'izi deb ataladi.

Bir pallali giperboloidni *x=h, y=h* tenglama bilan aniqlangan tekislik bilan kessak , mos ravishda |*h*|<*a* va |*h*|<*b* bo'lganda kesimda

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{h^2}{a^2} \qquad \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{h^2}{b^2}$$

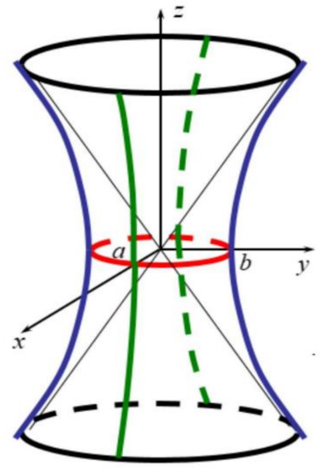
tenglamalar bilan aniqlanuvchi giperbolalar hosil bo'ladi. Bu giperbolalardan birinchisining yarim o'qlari mos ravishda

$$a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}},\qquad b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$$

kattaliklar tengdir .Agar |*h*|=*a* yoki |*h*|=*b* bo'lsa kesimda mos ravishda

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0\ va\ \ \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

tenglamalar bilan aniqlanuvchi ikkita kesishuvchi to'g'ri chiziqlar hosil bo'ladi. Bu faktlarni hisobga olib birr pallali giperbolani chizmada tasvirlashimiz mumkin.



4-tarif. Sirtning har bir nuqtasidan shu sirtda yotuvchi to'g'ri chiziq o'tsa. Bunday sirt chiziqli sirt deyiladi.

Sirt chegaralangan bo'lsa , unda to'g'ri chiziq yotmaydi va shuning uchun u chiziqli sirt bo'lmaydi.Demak, ellipsoid chiziqli sirt bo'lmaydi.

1-teorema. Bir pallali giperboloid chiziqli sirt bo'lib , uning har bir nuqtasidan giperboloidda yotuvchi ikkita to'g'ri chiziq o'tadi.

Isbot. Bir pallali giperboloidning $M(x_0,y_0,z_0)$

nuqtasidan $\{l, m, n\}$ yo'nalishdagi to'g'ri chiziqning parametrik tenglamalari

$x = x_0 + lt$

$y = y_0 + mt$

$z = z_0 + nt$

ko'rinishida bo'ladi. Bu to'g'ri chiziq bir pallali giperboloidda yotishi uchun

$$\frac{(x_0+lt)^2}{a^2}+\frac{(y_0+mt)^2}{b^2}-\frac{(z_0+nt)^2}{c^2}=1$$

tenglik t ning har qiymatida bajarilishi kerak. Bu tenglikda

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-\frac{z_0^2}{c^2}=1$$

munosabatni hisobga olsak,

$$\frac{l^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}-\frac{n^2}{c^2}=0\ va\ \frac{lx_0}{a^2}+\frac{my_0}{b^2}-\frac{nz_0}{c^2}=0$$

tengliklarni hosil qilamiz. Yo'nalishni aniqlovchi $\{l, m, n\}$ vektorning hamma koordinatalari nolga teng bo'lmagani uchun yuqoridagi tenglikni birinchisidan $n \neq 0$ ekanligi kelib chiqadi. Biz umumiylikni chegaralamasdan $n=c$ deb olamiz. Bundan esa l, m lar uchun $\frac{l^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}=1$, $\frac{lx_0}{a^2}+\frac{my_0}{b^2}=\frac{nz_0}{c^2}$ shartni olamiz.Agar biz

$x_0 = x_1 + l\frac{z_0}{c}$, $y_0 = y_1 + m\frac{z_0}{c}$, (8)

tenglik bilan $(x_1, y_1, 0)$ nuqtani aniqlasak $\frac{lx_1}{a^2}+\frac{my_1}{b^2}=0$ tenglikni olamiz. Bundan tashqari

$$\frac{\left(x_1+l\frac{z_0}{c}\right)^2}{a^2}+\frac{\left(y_1+m\frac{z_0}{c}t\right)^2}{b^2}-\frac{z_0^2}{c^2}=\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}+2\left(\frac{lx_1}{a^2}+\frac{my_1}{b^2}\right)\frac{z_0}{c^2}+\left(\frac{l^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}-1\right)\frac{z_0^2}{c^2}$$

$$=\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}$$

tenglikdan

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1 \quad (9)$$

munosabat kelib chiqadi.Biz agar $l = -\frac{a}{b}y_1 u$, $m = \frac{b}{a}x_1 u$ tenglik bilan $\{l, m, n\}$ vektorning l, m koordinatasini aniqlasak $\frac{l^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}=\left(\frac{y_1^2}{b^2}+\frac{x_1^2}{a^2}\right)u^2$ munosabatni hisobga olib (9) tenglikdan u=±1 qiymatlarni topamiz. Demak, biz qidirayotgan to'g'ri chiziqlarning parametrik tenglamalari

$$x = x_0 - u\frac{a}{b}y_1 t$$

$$y = y_0 + u\frac{b}{a}x_1 t$$

$$z = z_0 + ct$$

ko'rinishda bo'ladi.Bu to'g'ri chiziqlar $t = -\frac{z_0}{c}$ bo'lganda $(x_1, y_1, 0)$ nuqtadan o'tadi.Haqiqatdan ham (8) tengliklardan

$$x_1 = x_0 + u\frac{a}{b}y_1\frac{z_0}{c}$$

$$y_1 = y_0 + u\frac{b}{a}x_1\frac{z_0}{c}$$

munosabatlarni hosil qilish mumkin.Teorema isbotlandi.

Endi mavzu bo'yicha bitta misolni yechilishini ko'rib o'tamiz.

Masala: Quyidagi tenglamalar qanday sirtlarni tasvirlaydi.

$$25x^2 + 3y^2 - 15z^2 - 75 = 0$$

Yechilishi: Yuqorida ko'rsatilgan 3-tenglikdan malumki (ya'ni misolimiz ikkinchi darajali hadlar va ozod haddan iborat) demak,bu mizol *markazli* ekan.

Tenglamani $A_1x^2 + A_2y^2 + A_3z^2 + 2B_1xy + 2B_2xz + 2B_3yz + 2C_1x + 2C_2y + 2C_3z + F = 0$ tenglik yordamida koeffitsentlari topib olamiz.

$Demak, A_1$=25 , A_2=3, A_3=-15, va ozod hadimiz F=-75 tehg ekan .keyingi o'rinda biz $M = B_1$-A_1A_2 formula yordamida *M* ni aniqlasak M=-75 chiqar ekan.$D = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ B_1 & A_2 & C_2 \\ C_1 & C_2 & F \end{vmatrix}$ dan foydalanib tenglamamizni diskriminantini topamiz . Bizga malum bo'ldiki D=$\begin{vmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -75 \end{vmatrix}$=-5626≠0 ya'ni *D≠0* va M<0 bo'lgani uchun A_1*D ni tekshiramiz A_1*D=25*(-5625)<0 bo'lgani uchun yuqoridagi tenglamamiz ellipsoid tenglamasi ekan.

Demak, *Javob*: Markazli ellipsoid tenglamasi

Ushbu maqolada chiziqli algebra va analitik geometrya fanidan ikkinchi tartibli sirtlar mavzusini iloji boricha chuqurroq tushintirishga harakat qildim va masalalar ham ko'rib o'tdim.Maqola sizga manzur keldi degan umitdaman.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR:

1. "Analitik geometrya va chiziqli algebra"-X.R.Latipov,Sh.I.Tojiyev, R.Rustamov-"O'zbekiston"-1995-(237-250)-betlar.
2. Имомов А., Иномиддинов С., Настинов С. ГДТ 3 тур чегара масалага айирмали схема //Нам ДУ ахборотномаси. – 2022. – С. 28-36.

3. Samatov B. T., Horilov M. A., Inomiddinov S. N. Differential LG-Game with “Life–Line” //ББК 22.251 я431+ 95.4 М341. – 2019. – С. 109.

4. Samatov B. T. et al. The strategy of parallel pursuit for differential game of the second order //Scientific Bulletin of Namangan State University. – 2019. – Т. 1. – №. 5. – С. 3-8.