SONNING BUTUN VA KASR QISM FUNKSIYASI VA UNGA DOIR MASALALARNI O‘QITISH METODIKASI.

Qorabekov O‘tkir Yangiboy o‘g‘li
Shahrisabz “Temurbeklar maktabi” harbiy akademik litseyi matematika fani o‘qituvchisi

Annotatsiya *Bugungi kunning zamonaviy matematika ta’limida sonning butun va kasr qismiga doir masalalar keng tarqalib kelmoqda. Ushbu maqola sonning butun va kasr qismi haqida dastlabki tushunchalar, ularning xususiyatlari, xossalari haqida ma’lumot berib, misollar yordamida o’quvchiga tushuntirib beradi.*

Kalit so’zlar: *Butun qism, kasr qism, butun son, haqiqiy son, tenglama, funksiya, aniqlanish sohasi, qiymatlar sohasi, chegaralanganlik, ekstremum.*

Matematikadan misol va masalalarni yechishda, uni biroz bo’lsada tahlil qilish muhim ahamiyatga ega. Bu holat o’quvchilarda mantiqiy fikrlashni rivojlantiradi. Bunday masalalar qatoriga sonning butun va kasr qismi qatnashgan tenglama va tengsizliklar hamdanularning sistemalari misol bo’la oladi.

Sonning butun qismi tushunchasi nemis matematigi Iogani Karl Gauss (1771-1855), tomonidan kiritilgan. Haqiqiy x sonning butun qismi $[x]$ yoki $E(x)$ kabi belgilanadi. $[x]$ belgini 1808 yilda K. Gauss kiritgan. Sonning butun qismi funksiyasi esa fransuz matematigi Lejandr tomonidan 1798 yilda kiritilgan. O’quvchilarga dastlab sonning butun va kasr qismi to’g’risida qisqa va kerakli ma’lumotlarni beramiz. So’ngra har biri uchun alohida misollar ishlab ko’rsatamiz.

$y = [x]$ funksiyaning xossalari quyidagilardir.

1. $y = [x]$ funksiyaning aniqlanish soxasi barcha haqiqiy sonlar to’plami R;
2. $y = [x]$ funksiyaning qiymatlari to’plami barcha butun sonlar to’plami Z;
3. $y = [x]$ doimiy bo’lakli;
4. Umumiy ko’rinishidagi funksiya;
5. Davriy funksiya emas;
6. Chegaralanmagan;
7. Funksiya uzilish nuqtalariga ega;
8. $x \in [0; 1)$ da $y = 0$.
9. $x < 0$ da $y < 0$; $x \geq 0$ da $y \geq 0$.
10. Funksiya eksremal nuqtalarga ega emas.
11. y_{max} va y_{min} ga ega emas.

Agar n butun son bo’lsa $[n] = n$ bo’ladi. Ta’rifdan butun qism uchun ushbu asosiy tengsizlik o’rinli ekanligi kelib chiqadi: $[a] \leq a < [a] + 1$. Sonning butun qismi bir nechta muhim xossalarga ega.

1. Agar p butun son bo’lsa, $[x + p] = [x] + p$.
2. Ixtiyoriy x, y sonlar uchun $[x + y] \geq [x] + [y]$.
3. Agar $[x] = [y]$ bo’lsa, u holda $[x - y] < 1$.
4. Agar n butun son bo’lsa $\left[\frac{[x]}{n}\right] = \left[\frac{x}{n}\right]$.
5. Ixtiyoriy haqaqiy x son uchun $[[x]] = [x]$.
6. Agar $x < y$ bo’lsa u holda $[x] \leq [y]$.

Haqiqiy son x ning kasr qismi deb, $x - [x]$ ga aytiladi va $\{x\}$ kabi belgilanadi. $y = \{x\}$ ning eng sodda xossalari:

1. $y = \{x\}$ ning aniqlanish soxasi barcha haqiqiy sonlar to’plami R.
2. $y = \{x\}$ ning qiymatlari soxasi $[0; 1)$ yarim oraliq.
3. Umumiy ko’rinishdagi funksiya.
4. Chegaralangan funksiya.
5. Funksiya uzulishga ega.
6. Barcha butun x lar $y = 0$.
7. Barcha haqiqiy x lar uchun $y \in [0; 1)$.
8. $x \in [n; n + 1)$ da funksiya monoton o’suvchi.
9. Funksiya ekstremumga ega emas.
10. $x = n$ da $y_{min} = 0$.

[x]≤x≤[x]+1 dan 0≤x-[x]<1 ya’ni 0≤{x}<1. Oxirgi tengsizlik sonning kasr qismi uchun asosiy hisoblanadi. Yuqoridagi ikkita ta’rifga doir bir nechta misollar keltiramiz.

[2,3]=2; [0,5]=0; [4]=4; [-0,3]=-1; [-2,5]=-3; [-5]=-5; [-8,01]=-9.

{5,47}=0,47; $\{4\frac{1}{9}\}=\frac{1}{9}$; {0,23}=0,23; {0}=0; {-7,29}=0,71; $\{-3\frac{4}{11}\}=\frac{4}{11}$; {-6}=0.

Butun qism belgisi ostida qatnashgan eng sodda tenglamalar $f(x) = [g(x)]$ ko’rinishida bo’ladi. Bu tenglama ushbu aralash sistemaga ekvivalant.

$$\begin{cases} [g(x)] = k, \\ k \leq g(x) < k + 1, \\ f(x) = k. \end{cases}$$

Bir nechta misollar keltiramiz.

1. [x]=2 ta’rifga asosan x∈[2;3)

2. [x+3,6]=7 ta'rifga asosan $7 \leq x+0{,}6<8;\quad 7-0{,}6 \leq x<8-0{,}6\quad 6{,}4 \leq x<7{,}4$.

3. [x]=2,3 bu tenglama yechimga ega emas.

4. $4\cdot [x]=25\{x\}-4{,}5.\ \ 0 \leq \{x\}<1$ bo'lgani uchun chap tomon faqat {x}=0,5 da butun bo'ladi. U holda 4·[x]=8; [x]=2. Shunday qilib x=2,5 ekan.

5. $[x^3]+[x^2]+[x]=\{x\}^{1999}-1$. Tenglamaning o'ng qismi butun bo'lishi uchun {x}=0 bo'lishi kerak. U holda x={x}+[x]=[x], demak, berilgan tenglama ushbu ko'rinish oladi.

$x^3+x^2+x=-1$ bu yerdan x=-1 ni topamiz.

6. 19[x]+97{x}=1997. Bu tenglamani quyidagicha yozib olamiz $\{x\}=\frac{1997-19[x]}{97}$, u holda $0 \leq \frac{1997-19[x]}{97}<1$. $100<[x]\leq 105\frac{2}{19}$, shuning uchun ham [x]={101, 102, 103, 104, 105}. Natijada $x=k+\frac{1997-19k}{97}$, k=101, …, 105 tenglamaning yechimlari bo'ladi.

7. $\left[\frac{x-3}{2}\right]=\left[\frac{x-2}{3}\right]$ tenglamani yeching. Agar x tenglamaning yechimi bo'lsa, u holda ushbuni yozish mumkin: $\begin{cases} k \leq \frac{x-3}{2}<k+1 \\ k \leq \frac{x-2}{3}<k+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2k+3 \leq x<2x+5 \\ 3k+2 \leq x<3k+5 \end{cases} \quad (1)$

Bu oxirgi Sistema yechimga ega bo'lishi uchun 2k+3<3k+5 va 3k+2<2k+5 bo'lishi kerak. Bu yerdan k=-1, 0, 1, 2 ni hosil qilamiz. k ning bu qiymatlarida (1) ni yechib berilgan tenglama yechimini topamiz.

8. $[sinx+cosx]=1$ tenglamani yeching.

$1 \leq sinx+cosx<2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \leq \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)<\sqrt{2} \quad \Rightarrow sin(x+\frac{\pi}{4}) \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow$ $\frac{\pi}{4}+2\pi k \leq x+\frac{\pi}{4} \leq \frac{3\pi}{4}+2\pi k,\quad k\epsilon Z.$

9. Ushbu tengsizlikni qanoatlantiruvchi eng kichik natural m soni topilsin. $0{,}3<\{\sqrt{m}\}<0{,}(3)$

Yechish. Faraz etaylik $\sqrt{m}=k+\alpha$, kϵZ, $\alpha\epsilon[0;1)$. U holda shartga ko'ra $\frac{3}{10}<\alpha<\frac{1}{3}$ bunga asosan $k+\frac{3}{10}<\sqrt{m}<k+\frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad k^2+\frac{3}{5}k+\frac{9}{100}<m<k^2+\frac{2}{3}k+\frac{1}{9}$ tekshirish shuni ko'rsatadiki k=1, k=2 da oxirgi tengsizlik bajarilmaydi, k=3 da esa m=11 ni hosil qilamiz. Demak, izlanayotgan son 11 ekan.

10. $\begin{cases} [x+y+4]=18-y \\ [x+1]+[y-1]=18-x-y \end{cases}$ Yechish. Sistemaning birinchi tenglamasini qaraymiz.

[x+y+4]=18-y $\Rightarrow$ 18-y≤x+y<18-y+1 $\Rightarrow$ 18-y-x≤y+4<18-y-x+1.

Sistemaning ikkinchi tenglamasini hisobga olsak

[x+1]+[y-1]≤ $y+4<[x+1]+[y-1]+1$, natijada [y+4]=[x+1]+[y-1] $\Rightarrow$ [y]+4=[x]+1+[y]-1 $\Rightarrow$ [x]=4 $\Rightarrow$ x=4.

Sistemaning ikkinchi tenglamasiga x=4 ni qo'yib 5+[y-1]=14-y $\Rightarrow$ [y-1]=9-y $\Rightarrow$ 9-y≤y-1≤9-y+1 $\Rightarrow$ 9≤2y-1<9+1 $\Rightarrow$ 10≤2y<11 $\Rightarrow$ 5≤ y<5,5 y=5.

Javob: x=4; y=5.

Funksiya xossalari va grafigidan foydalanib bunday tenglamalarni yechish mumkin.

11. $x\cdot(x-2)[x]=\{x\}-1$ tenglamani yeching.

Yechish. Berilgan tenglamani quyidagicha yozib olamiz:

$$(x-1)(x\cdot[x]-[x]-1)=0 \quad \Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ x\cdot[x]-[x]-1=0 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ [x]=\frac{1}{x-1} \end{cases}$$

Ikkinchi tenglamani grafik usulda yechib uning yechimga ega emasligini ko'rish mumkin.

12. x^3-8[x]+7=0 tenglamani yeching.

Yechish. [x]=x-{x} dan foydalanib berilgan tenglamani quyidagicha yozib olamiz 8{x}=x^2+8x-7. Bu yerdan 0≤x^2+8x-7<8. Bu tengsizlikni yechib xϵ[1;3)∪(5;7] (bu oraliqlarni y=x^2+8x-7 va y=8{x} funksiyalar grafiklaridan foydalanib ham toppish mumkin) noma'lum x ni [1;2), [2;3), (5;6), [6;7) va x=7 lardan tan;ab olsak x=1; 3; $\sqrt{33}$; $\sqrt{41}$; 7 larni hosil qilamiz. Bunda 3 ko'rsatilgan oraliqlarga tegishli emas, shuning uchun u tenglamaning ildizi bo'la olmaydi. Javob: 1, $\sqrt{33}, \sqrt{41}, 7$

13. $\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x-\sqrt{x}}=1$ tenglamani yeching.

Yechish. Tenglamaning aniqlanish soxasini topamiz.

$\begin{cases} x+\sqrt{x}\geq 0 \\ x-\sqrt{x}\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\geq -\sqrt{x} \\ x\geq \sqrt{x} \end{cases}$ bu sistemaning yechimi x≥0 bo'ladi.

Ushbu ikki holni qaraymiz. 0≤x<1 va x≥ 1. Agar x≥1 bo'lsa, [x]≥1 bo'ladi. Va $\sqrt{x+\sqrt{x}}\geq 2$. Bu holda tenglama yechimga ega emas. Agar 0<x<1 bo'lsa x-$\sqrt{x}$ ≥0 tengsizlik o'rinli bo'lmaydi. Natijada tenglama yechimga ega emas.

14. $\left[\frac{n}{2}\right]-3n+(-1)^n-1$ ifoda ixtiyoriy natural n larda 5 ga bo'linishini isbotlang.

Yechish. 1. Faraz etaylik n=2m bo'lsin, u holda $\left[\frac{n}{2}\right]=\left[\frac{2m}{2}\right]=m=\frac{n}{2}$, u holda berilgan ifoda m-3·2m+$(-1)^{2m}$-1=-5m ko'rinishda bo'lib u 5 ga bo'linadi.

2. Agar $n = 2m+1$ bo'lsa, u holda $\left[\frac{n}{2}\right] = \left[\frac{2m+1}{2}\right] = \left[\frac{2m-2}{2} + \frac{3}{2}\right] = \left[m-1+1+\frac{1}{2}\right] = \left[m+\frac{1}{2}\right] = m$

Berilgan ifoda quyidagi ko'rinishni oladi $m - 3(2m+1) - 1 - 1 = -5m - 5$ bu ham 5 ga bo'linadi. Shunday qilib berilgan ifoda ixtiyoriy natural n da 5 ga bo'linadi.

15. $[tgx] = 2\cos^2 x$ tenglamani yeching.

Yechish. Tenglama o'ng tomonini baholaymiz: $0 \leq 2cos^2x \leq 2$. U holda $0 \leq [tgx] \leq 2$ va $[tgx] \epsilon Z$ bo'lgani uchun $[tgx]$ faqat 0, 1, 2 qiymatlarni qabul qiladi.

1. $[tgx] = 0$ bo'lsin. U holda berilgan tenglama $2\cos^2 x = 0$ yoki $cosx = 0$ bu yerdan x=$\frac{\pi}{2} + \pi k,\ k\epsilon Z$ ammo bu nuqtalarda tgx mavjud emas.

2. $[tgx] = 1$ bo'lsin. U holda berilgan tenglama $2\cos^2 x=1$ ko'rinish oladi. Uning yechimi x=$\pm\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k\epsilon Z$. $[tgx] = 1$ bo'lgani uchun, faqat x=$\pm\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k\epsilon Z$. Yechimlar qoladi.

3. $[tgx] = 2$ bo'lsin. U holda berilgan tenglama $2\cos^2 x = 2$ ko'rinish oladi. $cos^2x = 1$, uning yechimlari $x = \pi k;\ k\epsilon Z$. Ammo bu nuqtalarda $tgx = 0$ bo'lib, shartga ziddir.

16. $[sinx] \cdot \{sinx\} = sinx$ tenglamani yeching.

Berilgan sinx funksiyaning qiymatlari soxasii [-1;1] bo'lgani uchun ushbu hollarni qaraymiz.

1. Agar $sinx$ butun bo'lsa, y -1; 0; 1 ga teng bo'ladi. Bunda $\{sinx\} = 0$ bo'ladi. Natijada faqat $sinx = 0$ bo'lib, bundan $x = \pi n$, nϵZ ni hosil qilamiz.

2. Agar $sinx\epsilon(0;1)$ bo'lsa, u holda $[sinx] = 0$ bo'ladi. Berilgam tenglama 0·{sinx}=sinx yoki $sinx = 0$ ni hosil qilamiz, demak, bu holda ildiz mavjud emas.

3. Agar sinxϵ(-1;0) bo'lsa, u holda $[sinx] = -1$. $\{sinx\} = sinx - [sinx] = sinx + 1$. Bu holda tenglama $-1 \cdot (sinx+1) = sinx \quad \Rightarrow sinx = -\frac{1}{2}$, bu tenglamani yechib x=$(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k;\ \ k\epsilon Z$ ni hosil qilamiz. Javob: x=πn, nϵZ, x=$(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k;\ \ k\epsilon Z$.

17. x+$\frac{92}{x} = [x] + \frac{92}{[x]}$ tenglamani yeching.

Yechish. Berilgan tenglamani quyidagicha qayta yozib olamiz. (x-[x])(1-$\frac{92}{x[x]}$)=0. Ko'rinib turubdiki noldan farqli barcha butun sonlar berilgan tenglamani yechimlari bo'ladi. Qolgan yechimlar esa 1-$\frac{92}{x[x]} = 0$ dan topiladi. [x]≠0 bo'lgani uchun oxirgi tenglamani quyidagicha yozib olamiz:

$$\begin{cases} [x] - \frac{92}{x} = 0 \\ [x] \neq 0 \end{cases} \quad (3)$$

$\{x\}$=x-[x]=x-$\frac{92}{x}$ ni hisobga olsak 0≤x-$\frac{92}{x} < 1$ ni hosil qilamiz.

Bu qo'sh tengsizlikning yechimi

x$\epsilon \left(\frac{1-\sqrt{369}}{2};\ -\sqrt{92}\right) \cup \left(\sqrt{92};\ \frac{1+\sqrt{369}}{2}\right)$

Bulardan esa [x]={-10;9} ni hosil qilamiz. u holda (3) sistemadan x=$-\frac{92}{10}$ va x=$\frac{92}{9}$natija kelib chiqadi.

Javob: $-\frac{92}{10}$; $\frac{92}{9}$; ± 1; ± 2; …..

18. [x]+$\frac{1}{[x]} = \{x\} + \frac{1}{\{x\}}$ tenglamani yeching.

Yechish. [x]+ $\frac{1}{[x]} - \{x\} - \frac{1}{\{x\}} = 0$ yoki [x]-{x}+$\frac{\{x\}-[x]}{[x]\cdot\{x\}}$=0, [x]$\neq 0$; {x}$\neq 0$.

([x]-{x})(1-$\frac{1}{[x]\cdot\{x\}}$)=0, [x]≠0; {x}≠0.

Bo'lgani uchun oxirgi tenglama ushbu tenglama teng kuchlidir.

$1 - \frac{1}{[x]\cdot\{x\}} = 0 \quad \Longrightarrow \quad [x]\cdot\{x\} - 1 = 0 \quad \Longrightarrow \ [x]\cdot\{x\} = 1$

Oxirgi tenglikdan $[x] > 0$ ni hosil qilamiz, chunki $\{x\} > 0$. Shunday qilib $x > 0$. Faraz etaylik $[x] = n$ (nϵN; n>1), u holda $\{x\} = \frac{1}{n}$ bo'ladi. $x = [x] + \{x\} = n + \frac{1}{n}$, n$\epsilon N$, n>1

Javob: $x_n = n + \frac{1}{n}$; $n\epsilon Z,\ n > 1$

ADABIYOTLAR.

1.Alixonov S. "Matematika o'qitish metodikasi" Toshkent. O'qituvchi 2010.

2. Meliqulov A. va boshqalar. Matematika. I-II qism. Kasb-hunar kollejlari uchun o'quv qo'llanma. T. : O'qituvchi, 2004 y.

3.Мишин В.И. Методика преподавания математики в средней школе. Частная методика. М:1987г