О ЕДИНСТВЕННОСТИ АНАЛОГА ЗАДАЧИ ТРИКОМИ В ОБЛАСТИ, СОСТОЯЩЕЙ ИЗ БЕСКОНЕЧНОЙ ЧЕТВЕРТИ ЦИЛИНДРА И БЕСКОНЕЧНОЙ ТРЕУГОЛЬНОЙ ПРЯМОЙ ПРИЗМЫ

Д.С.Олимова
Ферганский военно-академический лицей Министерства обороны "школа Темурбеков", dilfuza.olimova.76@bk.ru

1. **Введение. Постановка задачи**

Изучение краевых задач для уравнений смешанного типа в силу его прикладной важности является одной из центральных проблем теории дифференциальных уравнений в частных производных. Впервые Ф.И.Франкль [1] обнаружил важные приложения этих задач в газовой динамике, а И.Н.Векуа [2] указал на важность проблемы уравнений смешанного типа при решении задач, возникающих в безмоментной теории оболочек.

До настоящего времени исследования краевых задач для уравнений смешанного типа с сингулярными коэффициентами проводились в основном в случае двух независимых переменных. Однако, такие задачи в трехмерных областях остаются малоизученными.

Задача Трикоми для смешанного эллиптико-гиперболического уравнения в трехмерном пространстве с помощью метода интегрального преобразования Фурье впервые исследована в работе [3]. После этой работы появились ряд работ, в которых рассматрены краевые задачи для различных уравнений эллиптико-гиперболического типа в трехмерных областях (см. например, [4]-[12]).

В данной работе изучается пространственная задачи Трикоми для трехмерного уравнения смешанного типа с тремя сингулярными коэффициентами в области, эллиптическая часть которой бесконечной четверти цилиндра, а гиперболическая часть − бесконечная треугольная прямая призма.

Пусть $\Omega=\{(x,y,z):(x,y)\in\Delta, z\in(0,\infty)\}$, где $\Delta-$ область плоскости xOy, ограниченная при $y\ge 0$ дугой $\bar{\sigma}_0=\left\{(x,y):x^2+y^2=1, x\ge 0, y\ge 0\right\}$ и отрезком $\overline{OM}=\left\{(x,y):x=0, 0\le y\le 1\right\}$, а при $y\le 0-$отрезками $\overline{OQ}=\left\{(x,y):x+y=0, 0\le x\le 1/2\right\}$ и $\overline{QP}=\left\{(x,y):x-y=1, 1/2\le x\le 1\right\}$, $O=O(0,0)$, $M=M(0,1)$, $P=P(1,0)$, $Q=Q(1/2,-1/2)$.

Введем обозначения: $\Omega_0=\Omega\cap(y>0)$, $\Omega_1=\Omega\cap(y<0)$; $\Delta_0=\Delta\cap(y>0)$, $\Delta_1=\Delta\cap(y<0)$; $S_0=\left\{(x,y,z):\sigma_0\times(0,\infty)\right\}$,

$S_1=\left\{(x,y,z):OM\times(0,\infty)\right\}$, $S_2=\left\{(x,y,z):OQ\times(0,\infty)\right\}$, $S_3=\left\{(x,y,z):\bar{\Omega}\cap(z=0)\right\}$, где $\bar{\Omega}=\bar{\Omega}_0\cup\bar{\Omega}_1$,

$$\bar{\Omega}_0=\left\{(x,y,z):x^2+y^2\ge 1, x\in[0,1], y\in[0,1], z\in[0,\infty)\right\},$$

$$\bar{\Omega}_1=\left\{(x,y,z):-y\le x\le y+1, x\in[0,1], y\in[-1/2,0], z\in[0,\infty)\right\}.$$

В области Ω рассмотрим уравнение

$$U_{xx}+(\mathrm{sgn}y)U_{yy}+U_{zz}+\frac{2\beta}{x}U_x+\frac{2\beta}{|y|}U_y+\frac{2\gamma}{z}U_z=0, \qquad (1)$$

где $\beta,\gamma\in R$, причем $\beta\in(0,1/4)$, $\gamma\in(0,1/2)$.

В области Ω уравнение (1) принадлежит смешанному типу, а именно в области Ω_0 -эллиптическому типу, а в области Ω_1 - гиперболическому типу, причем $x=0$, $y=0$ и $z=0$ являются плоскостями сингулярности уравнения, а при переходе через прямоугольник $\bar{\Omega}_0\cap\bar{\Omega}_1$ уравнение меняет свой тип.

Исследуем следующую задачу для уравнения (1) в области Ω.

Задача Т (Трикоми). Найти функцию $U(x,y,z)$, удовлетворяющую в области Ω уравнению (1) и следующим условиям:

$$U(x,y,z)\in C(\bar{\Omega})\cap C^{2,2,2}_{x,y,z}(\Omega_0\cup\Omega_1), \qquad (2)$$

$$U(x,y,z)\big|_{S_0}=0; \qquad (3)$$

$$U(x,y,z)\big|_{\bar{S}_1}=0,\ \ U(x,y,z)\big|_{\bar{S}_2}=0, \qquad (4)$$

$$U(x,y,z)\big|_{\bar{S}_3}=F(x,y),\ \ \lim_{z\to\infty}U(x,y,z)=0, \qquad (5)$$

а также условию склеивания

$$\lim_{y\to-0}(-y)^{2\beta}U_y(x,y,z)=\lim_{y\to+0}y^{2\beta}U_y(x,y,z),\quad x\in(0,1),\ z\in(0,c), \qquad (6)$$

где $F(x,y)$ – заданная функция.

2. **Построение частных решений уравнения (1) в области гиперболичности и эллиптичности уравнения**

Находим нетривиальные решения уравнения (1), удовлетворяющие условиям (3), (4). Разделив переменные по формуле $U(x,y,z)=u(x,y)Z(z)$, из уравнения (1) и краевых условий (3) и (4), получим уравнению

$$Z''(z)+\frac{2\gamma}{z}Z'(z)-\lambda Z(z)=0,\ 0<z<\infty \qquad (7)$$

и следующую задачу на собственные значения:

$$u_{xx}+(\mathrm{sgn}\,y)u_{yy}+\frac{2\beta}{x}u_x+\frac{2\beta}{|y|}u_y+\lambda u=0,\ \ (x,y)\in\Delta, \qquad (8)$$

$$u(0,y)=0,\ \ y\in[0,1],\quad u(x,y)=0,\ (x,y)\in\bar{\sigma}_0, \qquad (9)$$

$$u(x,-x)=0,\quad x\in[0,1/2]. \qquad (10)$$

Сначала рассмотрим задачу {(8),(9),(10)} в области Δ_1, т.е. рассмотрим следующую задачу:

$$u_{xx}-u_{yy}+\frac{2\beta}{x}u_x-\frac{2\beta}{y}u_y+\lambda u=0,\quad (x,y)\in\Delta_1, \qquad (11)$$

$$u(x,-x)=0,\quad x\in[0,1/2]. \qquad (12)$$

Решение этой задачи ищем в виде

$$u(x,y)=X(\xi)Y(\eta),\ \text{где}\ \xi=\sqrt{x^2-y^2},\ \eta=x^2/\xi^2. \qquad (13)$$

Тогда относительно функций $X(\xi)$ и $Y(\eta)$, получим следующие условия $X(0)=0$, $\left|\lim\limits_{\eta\to+\infty}Y(\eta)\right|<+\infty$ и уравнение

$$\xi^2X''(\xi)+(1+4\beta)\xi X'(\xi)+\left[\lambda\xi^2-\mu\right]X(\xi)=0,\ \xi>0; \qquad (14)$$

$$\eta(1-\eta)Y''(\eta)+\left[1/2+\beta-(1+2\beta)\eta\right]Y'(\eta)+\frac{1}{4}\mu Y(\eta)=0,\ \eta>1, \qquad (15)$$

где $\mu\in R$ – константа разделения.

Решение уравнения (14), удовлетворяющие условию $X(0)=0$, существуют при $\mu>0$ и они (с точностью до постоянного множителя) имеют вид [13]

$$X(\xi)=\xi^{-2\beta}J_\omega(\lambda\xi),\quad \omega>2\beta,\ m\in N, \qquad (16)$$

где $\omega=\sqrt{4\beta^2+\mu}$, а $J_\nu(x)$ – функция Бесселя первого рода.

(15) является гипергеометрическим уравнением Гаусса [14]. Его общее решение определяется формулой [14]

$$Y(\eta)=c_1\eta^{-\beta-\omega/2}F(\beta+\omega/2,1/2+\omega/2,1+\omega;1/\eta)+$$
$$c_2\eta^{-\beta+\omega/2}F(\beta-\omega/2,1-\omega/2,1-\omega;1/\eta), \qquad (17)$$

где c_1,c_2 – произвольные постоянные, а F – гипергеометрическая функция Гаусса.

Так как $\omega-2\beta>0$, то из (17) следует, что для того, чтобы получить ограниченную при $\eta\to+\infty$ функцию, в формуле надо положить $c_2=0$, в итоге чего, получим

$$Y(\eta)=c_1\eta^{-\beta-\omega/2}F(\beta+\omega/2,1/2+\omega/2,1+\omega;1/\eta). \qquad (18)$$

Следовательно, непрерывные и нетривиальные в $\overline{\Delta}_1$ решения задачи {(11),(12)}, согласно (13), (16) и (18), определяются равенствами

$$u_m^-(x,y)=c_1x^{-2\beta-\omega}\left(x^2-y^2\right)^{\omega/2}J_\omega\left(\sqrt{\lambda\left(x^2-y^2\right)}\right)\times$$

$$\times F\left(\beta+\frac{\omega}{2},\frac{1+\omega}{2},1+\omega;1-\frac{y^2}{x^2}\right),\ c_1\neq 0. \qquad (19)$$

Отсюда, пользуясь известными формулами [14]

$$F(A,B,C;1)=\Gamma(C)\Gamma(C-A-B)/\left[\Gamma(C-A)\Gamma(C-B)\right],\ C-A-B>0, \quad (20)$$

$$F(A,B,C;x)=(1-x)^{C-A-B}F(C-A,C-B,C;x), \qquad (21)$$

находим

$$\begin{cases}\tau_m^-(x)=\lim\limits_{y\to -0}u_m^-(x,y)=c_1k_1(\omega)x^{-2\beta}J_\omega\left(\sqrt{\lambda}x\right),\ x\in[0,1];\\ \nu_m^-(x)=\lim\limits_{y\to -0}(-y)^{2\beta}\dfrac{\partial}{\partial y}u_m^-(x,y)=c_1k_2(\omega)x^{-1}J_\omega\left(\sqrt{\lambda}x\right),\ x\in(0,1),\end{cases} \qquad (22)$$

где $\Gamma(z)-$гамма функция Эйлера [14],

$$k_1(\omega)=\frac{\Gamma(1+\omega)\Gamma(1/2-\beta)}{\Gamma(1-\beta+\omega/2)\Gamma\left[(1+\omega)/2\right]},\ k_2(\omega)=\frac{2\Gamma(1+\omega)\Gamma(1/2+\beta)}{\Gamma(\beta+\omega/2)\Gamma\left[(1+\omega)/2\right]}. \quad (23)$$

Теперь рассмотрим задачу {(8),(9),(10)} в области Δ_0, т.е. рассмотрим следующую задачу:

$$u_{xx}+u_{yy}+\frac{2\beta}{x}u_x+\frac{2\beta}{y}u_y+\lambda u=0,\ \ (x,y)\in\Delta_0, \qquad (24)$$

$$u(0,y)=0,\ y\in[0,1],\quad u(x,y)=0,\ (x,y)\in\bar{\sigma}_0, \qquad (9)$$

Разделив переменные по формуле

$$u(x,y)=Q(\rho)S(\varphi), \qquad (25)$$

где $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$, $\varphi=arctg(y/x)$, из уравнения (24) и условий $u\in C\left(\bar{\Delta}_0\right)$, (9), получим следующие задачи:

$$\rho^2Q''(\rho)+(1+4\beta)\rho Q'(\rho)+\left[\lambda\rho^2-\tilde{\mu}\right]Q(\rho)=0,\ \rho\in(0,1), \qquad (26)$$

$$Q(0)=0,\quad Q(1)=0, \qquad (27)$$

$$S''(\varphi)+4\beta ctg(2\varphi)S'(\varphi)+\tilde{\mu}S(\varphi)=0,\ \varphi\in(0,\pi/2), \qquad (28)$$

$$S(\pi/2)=0, \qquad (29)$$

где $\tilde{\mu}\in R$- константа разделения.

Сначала исследуем задачи {(26),(27)}. Общее решение уравнения (26) определяется в виде [15]

$$Q_m(\rho)=c_3\rho^{-2\beta}J_{\tilde{\omega}}\left(\sqrt{\lambda}\rho\right)+c_4\rho^{-2\beta}Y_{\tilde{\omega}}\left(\sqrt{\lambda}\rho\right),\ \rho\in[0,1], \qquad (30)$$

здесь $\tilde{\omega}=\sqrt{4\beta^2+\tilde{\mu}}$, $Y_\nu(x)-$функция Бесселя второго рода, а c_3 и c_4- произвольные постоянные.

Из (30) следует, что решения уравнения (26), удовлетворяющие первое из условий (27), существуют при $\tilde{\mu} > 0$ и они определяются равенствами

$$Q_m(\rho) = c_3 \rho^{-2\beta} J_{\tilde{\omega}}\left(\sqrt{\lambda}\rho\right),\ \rho \in [0,1],\ \tilde{\omega} > 2\beta. \qquad (31)$$

Теперь исследуем задачи {(28),(29)}. Общее решение уравнения (28) имеет вид [13]

$$S(\varphi) = c_5 F\left(\beta + \tilde{\omega}/2, \beta - \tilde{\omega}/2, \beta + 1/2; \sin^2\varphi\right) +$$
$$+ c_6 (\sin\varphi)^{1-2\beta} F\left[(1+\tilde{\omega})/2, (1-\tilde{\omega})/2, (3/2) - \beta; \sin^2\varphi\right], \qquad (32)$$

где c_5 и c_6 - произвольные постоянные.

Удовлетворяя функцию (32) условию (29) и применяя формулу (21), получим $c_6 = k_3(\tilde{\omega}) c_5$, где

$$k_3(\tilde{\omega}) = -\frac{\Gamma(1/2+\beta)\Gamma(1-\beta-\tilde{\omega}/2)\Gamma(1-\beta+\tilde{\omega}/2)}{\Gamma(3/2-\beta)\Gamma((1-\tilde{\omega})/2)\Gamma((1+\tilde{\omega})/2)}. \qquad (33)$$

Подставляя в (32) $c_6 = k_3(\tilde{\omega}) c_5$ и полагая $c_5 = 1$ (это не нарушает общности), имеем

$$S(\varphi) = F\left(\beta + \tilde{\omega}/2,\ \beta - \tilde{\omega}/2, \beta + 1/2; \sin^2\varphi\right) +$$
$$+ k_3(\tilde{\omega})(\sin\varphi)^{1-2\beta} F\left[(1+\tilde{\omega})/2, (1-\tilde{\omega})/2, 3/2 - \beta; \sin^2\varphi\right]. \qquad (34)$$

На основании (25), (31) и (34), заключаем, что непрерывные и нетривиальные в $\bar{\Delta}_0$ решения задачи {(24),(9)}, имеют вид

$$u_m^+(x,y) = c_3 \rho^{-2\beta} J_{\tilde{\omega}}\left(\sqrt{\lambda}\rho\right)\Big\{F\left(\beta + \tilde{\omega}/2,\ \beta - \tilde{\omega}/2, \beta + 1/2; \sin^2\varphi\right) +$$
$$+ k_3(\tilde{\omega})(\sin\varphi)^{1-2\beta} F\left[(1+\tilde{\omega})/2, (1-\tilde{\omega})/2, \frac{3}{2} - \beta; \sin^2\varphi\right]\Big\},\ c_3 \neq 0. \qquad (35)$$

Отсюда, непосредственным вычислением, находим

$$\begin{cases} \tau_m^+(x) = \lim\limits_{y \to +0} u_m^+(x,y) = c_3 x^{-2\beta} J_\omega\left(\sqrt{\lambda}x\right),\ x \in [0,1]; \\ \nu_m^+(x) = \lim\limits_{y \to +0} y^{2\beta} \dfrac{\partial u_m^+(x,y)}{\partial y} = c_3 (1-2\beta) k_3(\tilde{\omega}) x^{-1} J_\omega\left(\sqrt{\lambda}x\right),\ x \in (0,1). \end{cases} \qquad (36)$$

Далее, на основании $U(x,y,z) = u(x,y)Z(z)$ и введенных обозначений, из условий $U(x,y,z) \in C(\bar{\Omega})$ и (6) следуют следующие равенства:

$$\begin{cases} \tau_m^-(x) = \tau_m^+(x),\ x \in [0,1], \\ \nu_m^-(x) = \nu_m^+(x),\ x \in (0,1). \end{cases} \qquad (37)$$

Подставляя (22) и (36) в (37) и полагая $\omega = \tilde{\omega}$, имеем однородную систему уравнений относительно c_1 и c_3:

$$\begin{cases} k_2(\omega)c_1 - (1-2\beta)k_3(\omega)c_3 = 0, \\ k_1(\omega)c_1 - c_3 = 0, \end{cases} \qquad (38)$$

где $k_1(\omega)$, $k_2(\omega)$, $k_3(\omega)$ – постоянные, определяемые формулами (23), (33).

Система (38) имеет нетривиальное решение. Поэтому основной определитель её равен нулю. Составляя основной определитель системы (38) и приравнивая её к нулю, а затем, используя формулу [14] $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi/\sin(z\pi), z \notin Z$, имеем тригонометрическое уравнение относительно ω: $\sin\left[\pi(\beta+\omega/2)\right] + \cos(\omega\pi/2) = 0$. Выписывая решения этого уравнения и принимая во внимание условие $\omega > 2\beta$, находим

$$\omega_n = 2n - \beta - 1/2, \; n \in N. \qquad (39)$$

На основании (39), числа $\mu_n = \omega_n^2 - 4\beta^2, n \in N$ являются собственными значениями задач $\{(15), \left|\lim\limits_{\eta\to+\infty} Y(\eta)\right| < +\infty\}$ и $\{(28),(29)\}$.

Подставляя (39) в (31), а потом ее к второму условий из (27), имеем уравнению для отыскание параметра λ:

$$J_{\omega_n}\left(\sqrt{\lambda}\right) = 0. \qquad (40)$$

Известно, что при $l > -1$ функция Бесселя $J_l(z)$ имеет счетное число нулей, причем все они вещественны и с попарно противоположными знаками [16]. Так как $\omega_n > 2\beta$, то уравнение (40) имеет счетное число вещественных корней. Обозначая через σ_m – m-ый положительный корень уравнения (40), получим значения параметра λ, при которых существуют нетривиальные решения задачи $\{(26),(27)\}$ т.е. собственные значения задачи $\{(26),(27)\}$: $\lambda = \lambda_m = \sigma_m^2$, $m \in N$.

Учитывая доказанное выше и равенства (19), (35), $\omega = \tilde{\omega} = \omega_n$, $\lambda = \sigma_m^2$, $c_3 = k_1(\omega_n)c_1$ (это следует из системы (38)) и полагая $c_5 = 1$ (это не нарушает общности), заключаем, что функции

$$u_{nm}(x,y)=\begin{cases}\rho^{-2\beta}J_{\omega_n}(\sigma_m\rho)\left\{F\left(\beta+\dfrac{\omega_n}{2},\beta-\dfrac{\omega_n}{2},\beta+\dfrac{1}{2};\sin^2\varphi\right)+\right.\\ \left.+k_3(\omega_n)(\sin\varphi)^{1-2\beta}F\left(\dfrac{1+\omega_n}{2},\dfrac{1-\omega_n}{2},\dfrac{3}{2}-\beta;\sin^2\varphi\right)\right\},(x,y)\in\bar{\Delta}_0;\\ k_1^{-1}(\omega_n)x^{-2\beta-\omega_n}\left(x^2-y^2\right)^{\omega_n/2}J_{\omega_n}\left(\sigma_m\sqrt{x^2-y^2}\right)\times\\ \times F\left(\beta+\dfrac{\omega_n}{2},\dfrac{1+\omega_n}{2},1+\omega_n;1-\dfrac{y^2}{x^2}\right),\ (x,y)\in\bar{\Delta}_1,\ n,m\in N\end{cases}$$

(41)

являются непрерывными и нетривиальными в $\bar{\Delta}$ решениями задачи $\{(8),(9),(10)\}$.

В работе [13] доказана, что при $0<\beta<1/4$ система собственных функций полна в пространстве $L_2(\Delta_0)$.

Теперь рассмотрим уравнение (7). Общее решение уравнения (7) при $\lambda_m=\sigma_m^2,\ m\in N$, имеет вид [17]

$$Z_m(z)=c_7z^{1/2-\gamma}I_{1/2-\gamma}(\sigma_m z)+c_8z^{1/2-\gamma}K_{1/2-\gamma}(\sigma_m z),\qquad (42)$$

где c_7 и c_8-произвольные постоянные, а $I_l(x)$ и $K_l(x)$– функция Бесселя мнимого аргумента и функция Макдональда порядка l [16] соответственно.

По второй условий (5) решение $U(x,y,z)$ уравнения (1) имеет ноль на бесконечности, поэтому функции $Z_m(z)$ при $z\to\infty$ должно иметь ноль. Из равенство (42), на основании асимптотических поведений функций $I_\nu(z)$ и $K_\nu(z)$ при больших z [18, стр. 173]:

$$I_\nu(z)\approx\frac{e^z}{(2\pi z)^{1/2}},\ K_\nu(z)\approx\left(\frac{\pi}{2z}\right)^{1/2}e^{-z},$$

следует, что $c_7=0$, так как функция $z^{1/2-\gamma}I_{1/2-\gamma}(\sigma_m z)$ при $z\to\infty$ стремится к бесконечности. Тогда, полагая в (42) $c_7=0$, имеем

$$Z_m(z)=c_8z^{1/2-\gamma}K_{1/2-\gamma}(\sigma_m z).\qquad (43)$$

Таким образом, в области Ω частные решения уравнения (1), удовлетворяющие условиям (2)-(4), (6) и второе из условий (5), определяется формулой

$$U_{nm}(x,y,z)=u_{nm}(x,y)Z_m(z),\ n,m\in N,\qquad (44)$$

где $Z_m(z)$ и $u_{nm}(x,y)$– функции, определяемые равенствами (43) и (41) соответственно.

3. **Единственность решения задачи** Т

Решение задачи T в области Ω_0 будем искать в виде суммы ряда

$$U(x,y,z)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}c_{8nm}u_{nm}(x,y)z^{1/2-\gamma}K_{1/2-\gamma}(\sigma_m z), \tag{45}$$

где $u_{nm}(x,y)-$ функции, определяемые равенством (43), а $c_{8nm}-$пока неизвестные коэффициенты.

Предположим, что ряд (45) в $\bar{\Omega}_0$ сходится равномерно. Тогда умножая обе части этого равенства на $u_{kl}(x,y)$ и интегрируя по области Δ_0, имеем

$$\|u_{kl}\|^2 z^{1/2-\gamma}K_{1/2-\gamma}(\sigma_l z)c_{8kl}=\iint_{\Delta_0}U(x,y,z)u_{kl}(x,y)dxdy,\ k,l\in N, \tag{46}$$

где $\|u_{kl}\|^2=\iint_{\Delta_0}u_{kl}^2(x,y)dxdy$.

Из (46) при $k=n,l=m$ (это для удобства) в силу первой условий из (5), находим коэффициенты c_{8nm} в виде $c_{8nm}=\dfrac{2^{1/2+\gamma}\sigma_m^{1/2-\gamma}}{\Gamma(1/2-\gamma)}F_{nm}$, где

$$F_{nm}=\frac{1}{\|u_{nm}\|^2}\iint_{\Delta_0}F(x,y)u_{nm}(x,y)dxdy. \tag{47}$$

Теперь можем доказать следующую теорему.

Теорема 1. Если существует решение задачи T, то оно единственно.

Доказательство. Для этого достаточно доказать, что однородная задача T имеет только тривиальные решения. Пусть $F(x,y)\equiv 0$. Тогда $F_{nm}=0$ и $c_{8nm}=0$ при всех $n,m\in N$. На основании этого, из (46) следует, что

$$\iint_{\Delta_0}U(x,y,z)u_{nm}(x,y)dxdy=0.$$

Отсюда, в силу полноты системы собственных функций (41) в пространстве $L_2(\Delta_0)$ и $U(x,y,z)\in C(\bar{\Omega}_0)$, следует $U(x,y,z)\equiv 0$ в $\bar{\Omega}_0$.

Пользуясь этим равенством, легко убедиться, что $U(x,+0,z)\equiv 0,\ \lim\limits_{y\to+0}y^{2\beta}U_y(x,y,z)\equiv 0,\ x\in[0,1],\ z\in[0,c]$.

Тогда, в силу условий склеивания (6), справедливы равенства

$$U(x,-0,z)\equiv 0,\ \lim_{y\to-0}(-y)^{2\beta}U_y(x,y,z)\equiv 0,\ x\in[0,1],\ z\in[0,c]. \tag{48}$$

Из результатов работы [19] следует, что решение уравнения

$$U_{xx}-U_{yy}+U_{zz}+\frac{2\beta}{x}U_x-\frac{2\beta}{y}U_y+\frac{2\gamma}{z}U_z=0,\ (x,y,z)\in\Omega_1,$$

удовлетворяющее условиям (48), тождественно равно нулю, т.е. $U(x,y,z)\equiv 0,\ (x,y,z)\in\bar{\Omega}_1$. Теорема 1 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Франкль Ф.И. Избранные труды по газовой динамике. М., Наука. 1973.

2. Векуа И.Н. Обобщенные аналитический функции. М., ГИФМЛ, 1959.

3. Бицадзе А.В. Об одном трехмерном аналоге задачи Трикоми // Сиб. мат. журн. 1962. Т. 3, № 5. С. 642–644.

4. Ежов А.М., Пулькин С.П. Оценка решения задачи Трикоми для одного класса уравнений смешанного типа // Докл. АН СССР. 1970. Т. 193, № 5. С. 978–980.

5. Нахушев А.М. Об одном трехмерном аналоге задачи Геллерстедта // Дифференц. уравнения. Минск, 1968. Т. 4, № 1. С. 52–62.

6. Пономарев С.М. К теории краевых задач для уравнений смешанного типа в трехмерных областях // Докл. АН СССР. 1979. Т. 246, № 6. С. 1303–1306.

7. Салахиддинов М.С., Исломов Б. Краевые задачи для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа в пространстве // Узб. мат. журн. 1993. № 3. С. 13–20.

8. Уринов А.К., Каримов К.Т. Задача Трикоми для трехмерного уравнения смешанного типа с тремя сингулярными коэффициентами// Вестник НУУз. – Ташкент, 2016. -№ 2/1. -С. 14-25.

9. Urinov A. K., Karimov K. T. The Dirichlet problem for a three-dimensional equation of mixed type with three singular coefficients //Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences. – 2017. – Т. 221. – №. 4. – С. 665-683.

10. Назипов И.Т. Решение пространственной задачи Трикоми для сингулярного уравнения смешанного типа методом интегральных уравнений// Известия вузов, -2011. -№3. –С.69-85.

11. Сабитов К.Б., Карамова А.А. Спектральные свойства решений задачи Трикоми для уравнения смешанного типа с двумя линиями изменения типа и их применения// *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2001, том 65, № 4, 133–150.

12. Каримов К.Т. Задача Келдыша для трехмерного уравнения смешанного типа с тремя сингулярными коэффициентами в полубесконечном параллелепипеде// Вестник Удмуртского университета. Матем. Мех. Компьют. науки, –2020, -Т.30, -№1. -С. 31-48.

13. Салахитдинов М.С., Уринов А.К. К спектральной теории уравнений смешанного типа. –Ташкент: Mumtoz So'z, 2010. -355 с.

14. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрические функции. Функции Лежандра. -М.: Наука, 1973. -296 с.

15. Уринов А.К., Каримов К.Т. Задача Трикоми для трехмерного уравнения смешанного типа с тремя сингулярными коэффициентами// Вестник НУУз. – Ташкент, 2016. -№ 2/1. -С. 14-25.

16. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. –М.: Т.1.Изд. ИЛ., 1949. -798 с.

17. Urinov A. K., Karimov K. T. The Dirichlet problem for a three-dimensional equation of mixed type with three singular coefficients //Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences. – 2017. – Т. 221. – №. 4. – С. 665-683.

18. Лебедев Н.Н. Специальные функции и их приложения. М.: ФИЗМАТЛИТ, 1963. – 358 с.

19. Каримов Ш.Т. Решение задачи Коши для трехмерного гиперболического уравнения с сингулярными коэффициентами и со спектральным параметром//Узбекский математический журнал. 2014, №2, -С. 55-65.