QIZIQARLI MATEMATIKADA AJOYIB SONLAR.

Alijonov Shohruhbek Akramjon o`g`li
Andijonovdavlat pedagogika inututining Matematika va informatika yo`nalishi 1- bosqich talabasi
Muhammadova Gulnigor Erkinjon qizi
Andijonovdavlat pedagogika inututining Matematika va informatika yo`nalishi 1- bosqich talabasi
Ismoilova Mohlaroyim Muhammadishoq qizi
Andijonovdavlat pedagogika inututining Matematika va informatika yo`nalishi 1- bosqich talabasi

Annotatsiya: *Ushbu maqolada Matematika fanining asosiy yordamchisi hisoblanadi. Bu maqolada mukammal sonlar, baxtli sonlar, qulay sonlar, do`st sonlar, tug`ma sonlar, egizak tub sonlar keltirib otilgan. Asosan bu sonlarni maktab o`quvchilarga va akademik litsey o`quvchilarga ancha ilm olish uchun kerak bo`ladi.*

Kalit so'zlar: *Evklid, mukammal sonlar, qadimiy greklarga, baxtli sonlar, ketma-ketlik, qulay sonlar, Eyler, do`st sonlar, tug`ma sonlar, egizak tub sonlar.*

Аннотация: *В этой статье основное внимание уделяется математике. В этой статье перечислены идеальные числа, счастливые числа, удобные числа, дружественные числа, врожденные числа, простые числа-близнецы. В основном эти цифры нужны школьникам и академическим старшеклассникам, чтобы получить больше знаний.*

Ключевые слова: *Евклид, совершенные числа, древние греки, Счастливые числа, последовательность, удобные числа, Эйлер, дружественные числа, родные числа, двойные простые числа.*

Annotation: *This maqila is the main assistant in Mathematics. This article cites perfect numbers, Happy Numbers, favorable numbers, friendly numbers, innate numbers, twin primes. Basically these numbers are needed to get much more knowledge to school students and academic Lyceum students.*

Key words: *Euclid, perfect numbers, to ancient Greeks, happy numbers, sequence, convenient numbers, Euler, friendly numbers, innate numbers, twin primes.*

Mukammal sonlar.

Evklid o`zining "Negizlar"ida mukammal sonlar bilan shug`ullangan. U mukammal son deb o`zining xos bo`luvchilari (shu sonning o`zidan boshqa bo`luvchilari) yig`indisiga teng bo`lgan sonlarni atagan. Agar n sonining xos bo`luvchilari yig`indisi $\sigma(n)$ bilan belgilansa, mukammal son uchun $\sigma(n)=n$ bo`ladi.

Masalan, $6=1+2+3$; $28=1+2+4+7+14$.

Qadimiy greklarga (ikki ming yil oldin) faqat 4 ta mukammal son ma`lum bo`lgan: 6, 28, 496, 8128.

Mukammal sonlarni hosil qilish usuli quyidagi Yevklid-Eyler teoremasida bayon etilgan.

Teorema(Yevklid-Eyler teoremasi). Agar $n=2^{k-1}(2^k-1)$ (k>1 natural son) bo`lib, $2^k-1$ tub son bo`lsa, n mukammal son bo`ladi.

Baxtli sonlar.

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, ... (1)

toq sonlar ketma- ketligidan quyidagicha yangi ketma-ketlik tuzamiz.

$u_1=1$ va u_1 dan katta bo`lgan eng kichik toq son 3 ni $u_2$ deb olamiz. Endi (1) ketma-ketlikning har bir uchinchi elementini o`chiramiz. Natijada undagi 5, 11, 17, ... raqamlar o`chirilib,

1, 3, 7, 9, 13, 15, 21, 25, 27, 31, 37, ... (2)

ketma-ketlik hosil bo`ladi. (2) ketma-ketlikning $u_2=3$ dan keyingi o`chirilmasdan qolgan elementa 7 ni u_3 deb olamiz: $u_3=7$. Endi (2) ketma-ketlikning har bir yettinchi elementini o`chiramiz. Natijada

1, 3, 7, 9, 13, 15, 25, 27, 31, 37, ... (3)

ketma-ketlik dosil bo`ladi. (3) da $u_3=7$ dan keyin o`chirilmagan hadni $u_4=9$ deb olamiz. Endi (3) ketma-ketlikning har bir 9-hadini o`chiramiz va hokazo. Shu yo`l bilan shunday ketma-ketlikni hosil qilamizki, uning 100 dan kichik bo`lgan hadlari quyidagilardan iborat bo`ladi:

1, 3, 7, 9, 13, 15, 21, 25, 31, 33, 37, 43, 49, 51, 53, 63,
67, 69, 73, 75, 79, 87, 93, 99 (4)

Shu yo`l bilan tuzilgan cheksiz ketma-ketlikning hadlari **baxtli sonlar** deb ataladi. Baxtli son deb nom berilishiga sabab, ularning o`chirilmasdan qrlganligi bo`lsa kerak. (4) ketma-ketlikda cheksiz ko`p tub sonlar bor, degan gipoteza mavjud bo`lsa-da, lekin bu masala hozirgacha isbot qilinmagan. 98600 gacha bo`lgan baxtli sonlar orasida 715 ta tub baxtli son mavjudligi hisoblangan.

Qulay sonlar.

Quyidagi teorema o`rinlidir:

Agar natural son uchun $\begin{cases} n = A\alpha^2 + B\beta^2 \\ n = A\alpha_1^2 + B\beta_1^2 \end{cases}$ (*) munosabatlar o`rinli bo`lsa, (bunda A, B—natural, α, α_1, β, β_1 — noldan farqli butun sonlar), u holda n murakkab son bo`ladi (A=B bo`lganda yoyilma α va β larning ishoralari bilan farq qilsalar, ular bir xil yoyilmalar deb qabul qilinadi).

Agar natural n soni uchun (*) ning birinchisi o`rinli bo`lsa, u holda n tub son bo`lmasligi mumkin.

Bu teorema katta ahamiyatga ega, chunki uning yordamida berilgan sonning (*) ko`rinishdagi ikkita yoyilmasini topish natijasida, u sonning murakkabligini aniqlash mumkin bo`ladi. A·B ko`paytmaning ayrim qiymatlari uchun yuqorida keltirilgan teoremaning teskarisi o`rinli bo`ladi, ya`ni u ko`paytma uchun har qanday murakkab son $A\alpha^2+B\beta^2$ shaklida ikki xil ajralishga ega bo`ladi.

Eyler quyidagi savolni qo`ygan edi: A·B ko`paytmaning qanday qiymatlarida tub son $A\alpha^2+B\beta^2$ shaklda ifodalanadi?

Bu savolga Eyler to`la javob bera olmagan bo`lsa-da, lekin 1 dan 10000 gacha bo`lgan natural sonlar ichida bunday ko`paytmalarning faqat 65 tasi mavjudligini ko`rsatdi va ularni qulay sonlar deb atadi.

14k-1, 14k+9, 14k+11 ko`rinishdagi toq sonlarning tub son bo`lishi uchun. ularning x^2+7y^2 shaklida faqat bir xil yo`l bilan ifodalanishlari isbotlangan, bunda $(x,y)=1$, 7 esa qulay son.

Misollar.

1) $29=14\cdot2+1=1^2+7\cdot2^2$,

$37=14\cdot2+9=3^2+7\cdot2^2$,

$67=14\cdot4+11=2^2+7\cdot3^2$;

2) $11=x^2+7y^2$ (bunda $A\cdot B=7$), bu hol faqat $x=2$, $y=1$ bo`lganda bo`ladi.

$41=x^2+37y^2$. $A\cdot B=37$, $x=2$, $y=1$;

$18518809=197^2+1848\cdot100^2$ tub son. $AB= 1\cdot1848=1848$.

Eyler topg`an qulay sonlar quyidagilardir: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 16, 18, 21, 22, 24, 25, 28, 30, 33, 37, 40, 42, 45, 48, 57, 58, 60, 70, 72, 78, 85, 88, 93, 102, 105, 112, 120, 130, 133, 165, 168, 177, 190, 210, 232, 240, 253, 273, 280, 312, 330, 345, 357, 385, 408, 462, 520, 760, 840, 1320, 1365, 1848. Eyler chidam bilan hisoblashni 100000 gacha davom ettirgan bo`lsa-da, ko`rsatilgan 65 ta qulay sondan boshqa qulay sonlar topilgani yo`q. Bugungi kunda ham faqat shu 65 ta qulay son mavjud.

Qulay sonlar soning chekliligini matematik Choula isbot qilgan. Lekin ularning qancha ekanligiga aniq javob bera olmaymiz.

Do`st sonlar.

Pifagordan do`st nima deb so`raganlarida, «do`stim — mening o`zim. Bu 220 va 284 larning do`stligi» deb javob bergan ekan.

Bu sonlarning «do`st» ligi nimadan iborat, degan savolga javob beraylik.

Arab matematigi Sobit ibn Korra (826-901 yillar) do`st sonlarni hosil qilish qoidasini bergan edi. Keyinchalik bu qoidani Ferma qaytadan takrorlab, Dekart 1638 yilda nashr etgan edi.

Agar m va n sonlar uchun birining barcha xos bo`luvchilari yig`indisi ikkinchisiga teng bo`lsa, ya`ni $\sigma(m)= \sigma(n)$ bo`lsa, ular do`st sonlar deb ataladi. Bunda sonning o`zi bo`luvchi sifatida qabul qilinmaydi.

Masalan,

$220=1+2+4+71+142$ (1, 2, 4, 71 va 142 lar 284 ning xos bo`luvchilari).

$284=1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+100$, o`ng tomondagi qo`shiluvchi-lar 220 ning xos bo`luvchilaridir.

Demak, 220 va 284 lar — do`st sonlar.

Agar m va n do`st sonlar bo`lsa, u holda $m=2^\alpha p$; $n=2^\alpha q\cdot l$ bo`lishi kerakligi isbotlangan. Bunda $\alpha$ — natural son, p, q, l — tub sonlar bo`lib, $p=(2k+1)^2\cdot2^{2\alpha-k}-1$; $q=2^{\alpha-1}+2^{\alpha+k}$ larga teng bo`lishi kerakligi ham isbotlangan.Bu formulani Sobit ibn Korra ishlab chiqqan.

Agar k=1 deb olinsa, p, q, l tub sonlar uchun $p=3^2\cdot2^{2\alpha-1}-1$, $q=3\cdot2^{\alpha-1}-1$, $l=3\cdot2^\alpha-1$ larni hosil qilamiz. α ga har xil qiymatlar berib, k=1 uchun quyidagi jadvalni tuzish mumkin:

α	p	q	l	m	n
2	71	5	11	284	220
4	1151	23	47	18416	17296
7	73727	191	383	4437056	9363584

Albatta har qanday α uchun p, q, l lar tub son bo`lavermaydi. Shuning uchun α ni shunday tanlash kerakki, hosil bo`lgan p, q, l lar tub sonlar bo`lsin. α ning qiymati o`sishi bilan p, q, l ning qiymatlari, xususan p tez o`sadi va shuning uchun p tub yoki murakkab ekanligini aniqlash ayrim hollarda qiyin bo`lib qoladi.

Ayrim k=5, 7, 9, ... lar uchun yuqorida keltirilgan jadvalni tuzish juda qiyin.

K`orib o`tilganlardan tashqari do`st sonlarning yana bir necha juftini keltiramiz:

2620 va 2924;

5020 va 5564;

6232 va 6368;

10744 va 10856;

17296 va 18416;

66928 va 66992.

63020 va 76084;

Do`st sonlarni hosil qilishda asosiy qiyinchilik α ning qanday qiymatlarida p, q, l lar tub son bo`lishligini aniqlashdadir. Shuning uchun ham barcha do`st sonlar to`plamini tasavvur qila olmaymiz.

Hozirgi kunda 900 taga yaqin do`st sonlar jufti ma`lumdir. Ular orasida o`zaro tub bo`lgan do`st sonlar mavjud emas.

Eyler do`st sonlarning 60 juftini topgan edi. Ular orasida har ikkalasi ham juft son bo`lganlari 34 ta va har ikkalasi toq sonlardan iborat bo`lganlari 26 ta. Biri juft, ikkinchisi toq bo`lgan do`st sonlar jufti mav-judmi?

Bu savolga javob topilgani yo`q. Agar bunday do`st sonlar mavjud bo`lsa, ularning har biri $10^{23}$ dan katta bo`lib, m·n soni 20 tadan ortiq tub bo`luvchiga ega bo`lishi ;kerakligi isbotlangan.

Tug`ma sonlar

Tug`ma sonlar deb quyidagi yo`l bilan hosil qilinadigan ketma- ketlikning chapdan eng birinchi elementiga aytiladi.

Misol: 13 natural sonni olib unga o`zining raqamlari yig`indisini qo`shamiz: 13+(1+3)=17. Bu songa ham o`zining raqamlari yig`indisini qo`shamiz: 17+(1+7)=25 va hokazo, 13 va hosil bo`lgan sonlardan ketma-ketlik tuzamiz.

Natijada 13, 17, 25, 32, 39, ... (1) ketma-ketlik hosil bo`ladi. Bu ketma-ketlikni o`ng tomonga istagancha davom ettirish mumkin. (1) ketma-ketlikning chap tomoniga ham sonlar yozish mumkinmi, degan savol qo`yamiz.

Buning uchun shunday son topish kerakki, u o`zining raqamlar yig`indisi bilan 13 ni bersin. Bunday son 11 dir. Endi shunday son topish kerakki, u o`zining raqamlari yig`indisi bilan 11 ni bersin. Bunday son 10 dir. Endi 10 ham o`z navbatida 5 va 5 ning raqamlari yig`indisidan iborat. Lekin hech qanday son o`z raqamlari yig`indisi bilan 5 ni bera olmaydi. Demak, (1) ketma-ketlikni chap tomonga 5 gacha davom ettirish mumkin.

Shunday qilib, 5, 10, 11, 13, 17, 25, 32, 39, .;. (2) ketma-ketlikni hosil qilamiz va berilgan ta`rifga asosan 5 tug`ma son bo`ladi. (2) ketma- ketlikning hamma elementlari 5 dan tashqari ma`lum qoidaga asosan hosil bo`ladi. 5 soni esa «o`zi paydo bo`lganicha» qolib, undan oldin son paydo bo`lmaydi. Shuniig uchun ham uni tug`ma son deyilgan bo`lsa kerak.

Bir xonali tug`ma sonlar 1, 3, 5, 7 va 9 lar ekanligini osonlik bilan ko`rsatish mumkin. Shunday qilib, quyidagi ketma-ketliklarning birinchi hadlari tug`ma sonlardan iborat:

1, 2, 4, 8, 16, 23, 28, 38, 49, ...

3, 6, 12, 15, 21, 24, 30, ...

5, 10, 11, 13, 17, 25, 32, ...

7, 14, 19, 29, 40, 48, ...

10 dan 19 gacha bo`lgan ikki xonali sonlarning birortasi ham tug`ma son bo`la olmaydi (o`ylab ko`ring).

Birinchi ikki xonali tug`ma son 20 dir, chunki raqamlarining yig`indisini qo`shganda 20 hosil bo`ldigan natural son mavjud emas. Natijada 20 tug`ma sondan boshlab quyidagi ketma-ketlik hosil bo`ladi: 20, 22, 26, 34, ...; endi 21 dan 30 gacha bo`lgan ikki xonali sonlarning birortasi ham tug`ma son bo`la olmaydi. Ikki xonali tug`ma sonlar quyidagilardir: 31, 42, 53, 64, 75, 86, 97. Bularning tug`ma sonlar ekan-ligini hisoblash bilan aniqlash oson.

Ko`p xonali tug`ma sonlar ham mavjud: 132, 143, 233, 929, 1952, 874531 va hokazo.

Egizak tub sonlar

Ma`lumki, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47 ... (1)

tub sonlar ketma-ketligi cheksizdir.

Bu ketma-ketlikda ketma-ket joylashgan bir juft tub sonlar mavjud: 2 va 3. Boshqa bunday ketma-ket joylashgan tub sonlar mavjud emas. Lekin ayirmasi 2 ga teng bo`lgan tub sonlar mavjud bo`lib, ular egizak tub sonlar jufti deb ataladi. Shunday qilib, bir vaqtda tub bo`lgan p va p+2 sonlar egizakdir. Masalan, 3 va 5, 5 va 7, 11 va 13, 17 va 19 va hokazo. 100 000 gacha bo`lgan natural sonlar orasida 1224 ta egizak tub sonlar jufti, 1000 000 gacha bulgan natural sonlar orasida esa 8164 ta egizak tub sonlar jufti mavjud.

Angliya matematigi Glesher hisoblash natijasida 8000000 va 8100000 sonlari orasida 518 ta egizak tub sonlar jufti mavjudligini ko`rsatgan.

1958 yilda V. A. Golubev $n=8\cdot10^6$ gacha bo`lgan natural sonlar orasida 48619 ta egizak tub sonlar jufti mavjudligini hisoblagan.

30 000 000 gacha bo`lgan natural sonlar ketma-ketligida 152 892 ta egizak tub sonlar jufti mavjud.

(1) da egizak tub sonlar jufti qancha, degan savolga angliyalik matematiklar Xardi va Litlvudlar "egizak tub sonlar juftligi cheksiz ko`p" - deb javob berishgan. Bu fikrni hozirgi vaqtda egizak tub sonlar gipotezasi deb yuritiladi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR:

1. Б.Я.Ягудаев. Ажойиб сонлар оламида. Ўқитувчи нашрёти, Тошкент-1973.

2. В.В. Бардушкин ва бошқалар. Основы теории делимости числ. МГТУ, Москва-2003

3. Ёш математик қомусий луғати. Қомуслар бош таҳририяти. Тошкент-1991.

4. А.Нурметов, И.Қодиров.“Математикадан синфдан ташқари машғулотлар”. Тошкент-1980.