УДК 518.0

О ПРИБЛИЖЁННОМ РЕШЕНИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ 1 РОДА

Имомов Адаш
Наманганский государственный университет, доцент кафедры Информатика
adashimomov50@gmail.com

Аннотация: *В статье рассматриваются три основные вариационные методы теории некорректных задач. Приведена взаимосвязь этих методов, на основе вариационного метода Тихонова и уравнения Эйлера экстремума. Уравнение Эйлера является интегро-дифференциальным уравнением. При практическом решении некорректной задачи это интегро- дифференциальное уравнение дискредитируется и получают СЛАУ. В статье рассматривается приближённое решение интегрального уравнения первого рода.*

Ключевые слова: *некорректная задача, вариационные методы, их взаимосвязь, нормальное решение, регуляризация по Тихонову, сходимость регулярных решений.*

ON NUMERICAL SOLUTIONS OF INTEGRAL EQUATION 1 KIND

Imomov Адаш
Namangan state university, *Lecturer of Computer science department*
adashimomov50@gmail.com

Annotation: *In the article, we considered the three variation methods of incorrect problems. Given theoretical materials on link the three methods. The link effectible with variation method of Tichonov with equation of Euler is of minimal element. In concrete problems, the Euler's equation is integro-differential equation. The Euler's equation are discrete and there is solved. In the article, the incorrect 1-st kind integral equation solved by method of Tichonov methods.*

Ключевые слова: *incorrect problems, variations methods in incorrect problems, the link between methods, the normal solution, the regular methods of Tichonov and their convergence.*

1 ТУР ИНТЕГРАЛ ТЕНГЛАМАЛАРНИ ТАҚРИБИЙ ЕЧИШ

Имомов Адаш
ф.-м.ф.н., Наманган давлат университети, Информатика кафедраси
adashimomov50@gmail.com

Аннотация: *Мақолада нокорректⁿ масалалар назариясининг уч вариацион усули, улар орасидаги боғланишлар қаралган. Боғланиш Тихоновнинг параметрли вариацион усули ва экстремумнинг Эйлер тенгламаси билан берилади. Эйлер тенгламаси*

интегро- дифференциал тенгламадир. Бу тенглама дискретлаш жараёнида чизиқли тенгламалар системасига келтирилади. Мақолада нокоррект 1-тур интеграл тенглама ечиб кўрилган. Усулнинг параметри танлаб олиниб тақрибий ечим аниқ бўлгунгача давом эттирилган.

Калит сўзлар: *нокоррект масала, уч вариацион усул, улар оросила боғланиш, нормал ечим, нокоррект масалани регулярлаштириш, регуляр ечимларнинг яқинлашиши.*

I. ВВЕДЕНИЕ. О КОРРЕКТНО ПОСТАВЛЕННЫХ ЗАДАЧАХ.

Интегральным называется уравнение, в котором неизвестная функция $u(x)$ стоит под знаком интеграла. Одномерное нелинейное интегральное уравнение первого рода относительно неизвестной функции имеет вид:

$$\int_a^b K(x,y,u(y))dy = F(x,u), a \le x \le b, \qquad (1.1)$$

где ядро $K(x,y,u)$ и правая часть $F(x,u)$ -заданные функции.

Лучше всего изучены линейные интегральные уравнения (ИУ), в которые неизвестная функция входит линейно:

$$Lu \equiv p(x)u(x) - \lambda\int_a^b K(x,y)u(y)dy = f(x), a \le x \le b, \qquad (1.2)$$

$$Lu \equiv p(x)u(x) - \lambda\int_a^x K(x,y)u(y)dy = f(x), a \le x \le b. \qquad (1.3)$$

Они называются интегральными уравнениями Фредгольма и Вольтера. Если $p(x)=0$, то уравнения (1.2), (1.3) называются ИУ первого рода, если $p(x)=$ то – второго рода. Общий случай называется ИУ третьего рода. Когда в (1.2), (1.3) dy задано как $d\varphi(y)$, то о них говорят об ИУ Фредгольма-Стилтьеса или Вольтера-Стилтьеса.

Не всегда можно точно решить уравнения (1.1) -(1.3). Поэтому, часто их решают приближённо. Разработано много приближённых методов решения интегральных уравнений и соответствующие программы[1-9].

Рассмотрим в множествах U,F операторное уравнение

$$Au = f, u \in U, f \in F, \qquad (1.4)$$

где $A: U \to F$ -некоторый произвольный оператор, $\|.\|_U, \|.\|_F$ -нормы в U, F.

Определение 1 (Адамар, 1902 г.). Задача $Au = f, u \in U, f \in F$ считается поставленной корректно в паре множеств (U, F), если справедливы следующие условия корректности:

1) условие существования решения: для каждой правой части $f \in F$ существует решение $Au = f, u \in U$;если A-линейный обратимый оператор будем писать: $u = A^{-1} f$;

2) условие единственности решения: решение $u: Au=$ для каждого $f \in F$ единственно;

3) условие непрерывной зависимости решения от правой части:

$$\|u_1 - u_2\| \le C\| f_1 - f_2\|, Au_i = f_i, i = 1,2. \qquad (1.5)$$

Задачи, для которых не выполняются какое-либо условие корректности называются некорректно поставленными. Приведём несколько примеров некорректно поставленных задач:

1) система линейных уравнений с равным нулю определителем или с определителем, близким к нулю, где нарушаются все условия корректности;

2) задача интерполяции, где нарушается условие единственности решения;

3) задач дифференцирования, где нарушается условие устойчивости решения;

4) задача Коши для эллиптического дифференциального уравнения. Здесь также нарушается условие устойчивости.

5) интегральные уравнения первого рода, где нарушаются все условия корректности.

Докажем некорректность интегрального уравнения 1 рода Фредгольма.

Неустойчивость решения по правой части. Рассмотрим решение уравнения в виде гармоники: $u(x)=\exp(i\omega x)$, $\omega >> 1$. Такая гармоника называется высокочастотной. Если гармонику считать решением, то правая часть должна имеет такой вид:

$$f(x) = \int_a^b K(x,t)e^{i\omega t}dt = \frac{1}{i\omega}K(x,t)e^{i\omega t}\,|_a^b - \frac{1}{i\omega}\int_a^b K'(x,t)e^{i\omega t}dt = 0(\frac{1}{\omega}) \qquad (1.6)$$

В этом случае получаем $|f(x)| = 0(1/\omega) \to 0,\ \omega \to \infty$, но при этом имеем $|u|=1$, т.е. малому значению правой части соответствует немалое значение: и $|u| \to 1,\ \omega \to \infty$, и инетегральное уравнение первого рода неустойчиво. Такое утверждение верно и для интегрального уравнения Вольтера первого рода:

$$\int_a^x u(t)dt = f(x) \qquad (1.7)$$

Уравнение (1.7) эквивалентно задаче дифференцирования: $u(x) = f'(x)$. Если принять $f(x) = \cos(nx)/n$ то имеем, $u = u(x) = f'(x) = -\sin(nx)$. $|f(x)| = 0(1/n)$ и опять решение не малое:

$$|f'(x)| = |u(x)| = 1. \qquad (1.8)$$

Кроме того, интегральные уравнения (1.1), (1.3) первого рода не для всех правых частей имеют решения. Действительно, для этого правая часть должна быть дифференцируемой функцией. Кроме того, не для любых правых частей существует решение. Например, пусть ядро, в (1.1) имеет вид:

$$K(x,t) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x)b_i(t). \qquad (1.9)$$

Тогда интегральное уравнение первого рода не для всякой правой части имеет решение. Действительно, выражение (1.9) подставляем в интегральное уравнение и имеем:

$$\sum_{k=1}^{n}\beta_i a_i(x)=f(x),\ \ \beta_i=\int_a^b b_i(t)u(t)dt \qquad (1.10)$$

Это равенство показывает, что интегральное уравнение 1 рода имеет решение для правых частей, которые имеют вид (1.10).

Ясно, что решение некорректно поставленных задач с правыми частями, заданными с погрешностью вообще не имеет смысла.

Мы уже знаем, что система линейных уравнений с нулевым определителем или с определителем, близким к нулю некорректная задача. Выясним, устойчивость решения задачи о линейных уравнений более подробно. Пусть для Au=f имеем: $\|f-f_h\|_F \le h$ и $Au=f, Au_h=f_h$. Оценим ошибку $r=u_h-u$. Полагая $u_h=u+r$, $f_h=f+\eta$ имеем $Ar=\eta$. Исследуя относительную погрешность имеем:

$$(\|r\|/\|u\|)/(\|f\|/\|\eta\|)=(\|Au\|/\|u\|)/(\|A^{-1}\eta\|/\|\eta\|)\le$$
$$(\|A\|\|u\|/\|u\|)/(\|A^{-1}\|\|u\|/\|u\|)/(\|A^{-1}\|\|\eta\|/\|\eta\|)=v(A)=\|A\|\|A^{-1}\|. \qquad (1.11)$$

Величина $v(A)=\|A\|\|A^{-1}\|$ называется числом обусловленности оператора А. Отсюда вытекает, что если число обусловленности оператора А велико, т.е. если несуществует A^{-1} или , det(A) близок к 0, тогда величина относительной погрешности неограничено большая, т.е. нет устойчивости решения.

В качестве следующего примера рассмотрим задачу Коши для уравнения Лапласа:

$$\Delta u=0, u(0,y)=0, u_x(0,y)=\sin(Ky)/K. \qquad (1.12)$$

При $K\to\infty$ имеем $u(x,y)=0$. Но, точное решение этой задачи есть: $u(x,y,K)=sh(Kx)\sin(Ky)/K^2$. Ясно, что, $u(x,y,K)\to\infty, K\to\infty$, это показывает неустойчивость задачи (1.12).

2. ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ.

Долгое время считалось, что некорректные задачи не имеют практического смысла. Однако, начиная с первой пионерской работы акад. Тихонова А.Н. в 1963 году начали появляться практические задачи, для которых некоторые условия корректности не выполняются.

Академик А.Н.Тихонов [1, 3-7], академик М.М. Лаврентьев [1, 3-7], академик Иванов В.К. [1, 3-7], акад. Марчук Г.И[1, 3-7]. и их ученики доказали, что некорректные задачи также имеют практического смысла и для некоректно поставленных задач создали изящную теорию и практические прикладные приближённые методы. Такие приближённые метоы стали называтся регулярными приближёнными методами [1-7]. Кроме того, академик А.Н. Тихонов и его ученики создали теорию и практику нормального (сплайнового решения) решения некорректных задач [3-7]. Нормальное решение некорректной задачи — это решение задачи с некоторым функциональным минимальным значением среды всех решений в полунорме. При этом нахождение нормального решения оказалось устойчивой задачей. Были найдены приближённые методы определения нормальных решений.

В последнее время для решения задач вычислительной математики часто применяют математическую систему Mathcad. В математической системе Mathcad, привлекательным является тот факт, что для решения математической задачи нужно записать алгоритм решения задачи в виде, которая почти точно совпадает с естественной математической записью алгоритма, и компьютерных программ не надо составлять. Результаты можно достаточно просто вывести в виде таблицы, графиков функции, что очень важно для наглядного представления решения.

3. **МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ. Три вариационные задачи теории некорректных задач и метод регуляризации**[1-9].

3.1. **Основные результаты**

Пусть X, Y, Z −действительные гильбертовы пространства со скалярными произведениями и с нормами:

$(x_1,x_2)_X,(y_1,y_2)_Y,(z_1,z_2)_Z$ $\|x\|_X=\sqrt{(x,x)_X},\|y\|_Y=\sqrt{(y,y)_Y},\|z\|_Z=\sqrt{(z,z)_Z}$.

Заданы линейные непрерывные операторы $T: X\to Y$, A: $X\to$.Заданы элемент $z\in Z$ и числа ε,τ,α. Построим непустые множества:

$I_{z\delta}=\{x\in X \,\|\, \|Ax-z\|_Z\le\delta\},\Omega_\tau=\{x\in X\,\|\,\|Tx\|_Y\le\tau\}$.

Сформулируем следующие три вариационные задачи теории некорректных задач[1-9]:

$\sigma_\delta=\arg\min\limits_{x\in I_{z\delta}}\|Tx\|_Y^2$ (argmin-аргумент минимизирующий) (3.1)

$\sigma_\tau=\arg\min\limits_{x\in\Omega_\tau}\|Ax-z\|_Z^2$, (argmin-аргумент минимизирующий) (3.2)

$\sigma^\rho=\arg\min\limits_{x\in X}M_\rho[x,z]=\|Tu\|_Y^2+\rho\|Au-f\|_Z^2$, (3.3)

$\sigma_\alpha=\arg\min\limits_{x\in X}M_\alpha[x,z]=\alpha\|Tu\|_Y^2+\|Au-f\|_Z^2,\alpha=\rho^{-1}$ (3.4)

Первая задача называется задачей о нормальных решений уравнения. Вторая задача называется задачей о квазирешений уравнения $Ax-z=0$. Третья задача называется задачей о приближённых *регулярных* или *сглаженных* решений уравнения $Ax-z=0$. Эти задачи возникают при неточном задании операторного уравнения $Ax-z=0$. Задачи (2.1), (2.2) задачи на условный экстремум, а задача (3.3) на безусловный экстремум. Введём обозначения:

$KerT=\{x:Tx=0\}, KerA=\{x:Ax=0\}, \operatorname{Im}T=\{y\in Y: y=Tx\}, \operatorname{Im}A=\{z\in Z: z=Ax\}$

Приведём основные утверждения об этих задачах [8,9]:

Теорема 1. Решение задачи (3.1) существует тогда и только тогда, когда $KerT+I_{z\delta}$ замкнуто.

Теорема 2. Решение задачи (3.2) существует тогда и только тогда, когда $KerA+\Omega_\tau$ замкнуто.

Теорема 3. Решение задачи (3.3) существует тогда и только тогда, когда $KerT + KerA$ замкнуто.

Теорема 4. Пусть решение задачи (3.1) $\sigma_\delta = \sigma_\delta(z)$ существует. Тогда оно удовлетворяет одному из следующих условий:

$$1)\ \sigma_\delta = \sigma_\delta(z) \in KeT \cap I_{z\delta};\ 2)\ \sigma_\delta = \sigma_\delta(z) = \sigma^\rho(z) : \left\| A\sigma^\rho - z \right\|_Z = \delta. \qquad (3.5)$$

Теорема 5. Пусть решение задачи (3.2) $\sigma_\tau = \sigma_\tau(z)$ существует. Тогда оно удовлетворяет одному из следующих условий:

$$1)\ \sigma_\tau = \sigma_\tau(z) \in \Omega_\tau \cap I_{z0};\ 2)\ \sigma_\tau = \sigma_\tau(z) = \sigma^\rho(z) : \left\| T\sigma^\rho \right\|_Y = \tau. \qquad (3.4)$$

Теорема 6. Пусть решение задачи (3.3) $\sigma^\rho = \sigma^\rho(z)$ существует. Тогда оно удовлетворяет одному из следующих условий:

$$(T\sigma^\rho, Tx) + \rho(A\sigma^\rho - z, Ax) = 0, \forall x \in X \Leftrightarrow (T^T T + \rho A^T A)\sigma^\rho = \rho A^T f. \quad (3.6)$$

Таким образом, решение всех этих задач взаимосвязанные.

Теорема 7. (обратная теорема к т.4). Пусть $KerT \cap I_{z\delta} = \varnothing, \delta = [0, \min \left\| Ax - z \right\|_Z, X \in KerT\}$. Тогда существует единственное сплайновое квазирешение такое, что

$$\sigma_\delta = \sigma_\delta(z) = \sigma^\rho(z) : \varphi(\rho) = \left\| A\sigma^\rho - z \right\|_Z = \delta. \qquad (3.7)$$

Теорема 8. (обратная теорема к т.5). Пусть $\Omega_\tau \cap I_{z0} = \varnothing, \tau = [0, b]\}, b = \min \left\| Tx \right\|_Z, x \in I_{z0}$. Тогда существует единственное сплайновое квазирешение такое, что

$$\sigma_\tau = \sigma_\rho(z) = \sigma^\rho(z) : \varphi(\rho) = \left\| T\sigma^\rho \right\|_Y = b. \qquad (3.9)$$

Теорема 9. Регуряризованное решение $\sigma^\rho(z)$ существует тогда и только тогда, когда множество замкнуто $KerT + KerA$.

Пример. Метод регуляризации для системы линейных уравнений: Рассмотрим систему линейных уравнений:

$$Ax = b, A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix}, T = E \wedge D = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix}, x = x_T = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, Ex = x.$$

Построим два регулиризованных приближённых решения:

$$y(\rho) = \rho((E + \rho A^T A))^{-1}(A^T b), \rho = 10, 20, 30, 40;$$

$$z(\rho) = \rho((D^T D + \rho A^T A))^{-1}(A^T b), \rho = 100, 1000, 2000, 3000.$$

Проведём эксперименты с этими двумя регулиризованными решениями.

ρ	10	20	30	40	ρ	100	1000	2000	3000
$y(\rho)$	0.999	1	1	1	$z(\rho)$	0.99	0.999	1	1
	0.999	1	1	1		0.99	0.999	1	1
	0.999	1	1	1		0.99	0.999	1	1
	0.999	1	1	1		0.99	0.999	1	1

Приближённые решения очень быстро стабилизировались.

3.2. **Случай точно заданных входных данных** $Ax = z$.

Теорема 10. В условиях 1)- 2) нахождение решения задачи (3.3) устойчиво.

Доказательство. Условия 1), 2) являются условиями существования и единственности нормального решения. Докажем устойчивость нахождения нормального решения [8,9].

Очевидно, что множество нормальных решений-интерполяционных сплайнов $\sigma \in S = S[X,T,A] = \{s \in S \subseteq X, (Ts,Tx) = 0, x \in N(A)\}$ - есть замкнутое множество пространства X, кроме того, $AS = Z$ для каждого $z \in Z$ и нормальное решение единственно. Поэтому, след оператора A на замкнутом линейном пространстве S оператор A_S такой, что $A_S x = Ax = z$, $x \in$. отображает S на пространство Z взаимно-однозначно. По теорема Банаха о линейности, непрерыности и ограниченности обратного оператора [10, с. 31] обратный опрератор к A_S непрерывен и ограничен. Поэтому из равенств $A_S\sigma_1 = z_1, A_S\sigma_2 = z_2$

получаем:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = (A_S)^{-1}(z_1 - z_2) \Rightarrow \|\sigma_1 - \sigma_2\| = \|(A_S)^{-1}(z_1 - z_2)\| \le \|A_S^{-1}\|\|z_1 - z_2\|,$$

которое показывает устойчивость нахождения нормального решения.

Теперь докажем устойчивость нахождения сглаживающего, регулярного приближённого решения. Из критерия сглаживающего приближённого решения имеем:

$$(T^*T + \rho A^* A)\sigma^\rho = \rho A^* f. \tag{3.10}$$

Отсюда находим:

$$\sigma^\rho = \rho(T^T T + \rho A^T A)^{-1} A^T f, \tag{3.11}$$

$$\|\sigma_1^\rho - \sigma_2^\rho\| = \|\rho(T^*T + \rho A^* A)^{-1}(f_1 - f_2)\| \le |\rho|\|(T^*T + \rho A^* A)^{-1}\|\|f_1 - f_2\|.$$

Из условий существования и единственности находим, что оператор $\alpha(T^*T + \alpha A^* A)^{-1}$ существует, единственен и ограничен.

Теорема 11. В условиях существования и единственности нормальных решений справедлива сходимость [8,9]:

$$\lim_{\rho\to\infty}\|\sigma^\rho - \sigma\| = \lim_{\alpha\to 0}\|\sigma_\alpha - \sigma\| = 0. \tag{3.12}$$

Доказательство. Из определения (3.3) сглаживающего сплайна имеем :

$$\|T\sigma^\rho\|_Y^2 + \rho\|A\sigma^\rho - f\|_Z^2 \le \|T\sigma\|_Y^2 + \rho\|A\sigma - f\|_Z^2 = \|T\sigma\|_Y^2. \tag{3.13}$$

Таким образом мы имеем два неравенства:

$$\|T\sigma^\rho\|_Y^2 + \rho\|A\sigma^\rho - f\|_Z^2 \le \|T\sigma\|_Y^2, \ \rho\|A\sigma^\rho - f\|_Z^2 \le \|T\sigma\|_Y^2, \tag{3.14}$$

$$\|T\sigma^\rho\|_Y^2 \le \|T\sigma\|_Y^2, \tag{3.15}$$

$$\left\|A\sigma^{\rho}-f\right\|_{z}^{2}\le\frac{1}{\rho}\left\|T\sigma\right\|_{Y}^{2} \quad . \qquad (3.16)$$

Из неравенств (3.13),(3.14) находим следующее неравенство:

$$\left\|A\sigma^{\rho}\right\|_{Z}-\left\|z\right\|_{Z}\le\left\|A\sigma^{\rho}-z\right\|_{Z}\le\frac{1}{\sqrt{\rho}}\left\|T\sigma\right\|_{Y}\Rightarrow\left\|(A\sigma^{\rho}\right\|_{Z}^{2}\le(\frac{1}{\sqrt{\rho}}\left\|T\sigma\right\|_{Y}+\left\|z\right\|_{Z})^{2}. \qquad (3.17)$$

Из (3.13), (3.17) получаем

$$\left|\sigma^{\rho}\right|_{X}^{2}=\left\|T\sigma^{\rho}\right\|_{Y}^{2}+\left\|A\sigma^{\rho}\right\|_{Z}^{2}\le\left\|T\sigma\right\|_{Y}^{2}+(\left\|z\right\|_{Z}+\frac{1}{\sqrt{\rho}}\left\|T\sigma\right\|)^{2}. \qquad (3.18)$$

Следовательно, последовательность $\{\sigma^{\rho}\}$ ограничена.

Ограниченное множество в гильбертовом рефлексивном) пространстве является слабо относительно компактным и есть возможность выделения подпоследовательности $\{\sigma^{\rho_i}\}$ этой последовательности сходящуюся к некоторому пределу [10,с.60]. То что этот предел есть сглаживающий сплайн (регуляризованное решение)- это ясно из формул (3.15), (3.16). Тогда ясно, что предел этой последовательности есть интерполяционный сплайн (Т-нормальное решение). Этот предел единственен, как интерполяционный сплайн, поэтому из сходимости слабо этой под последовательности вытекает слабая сходимость всей последовательности [2, теорема 4.2, с.34; теорема 4.3, с.37].

Из (3.15), (3.16) получаем

$$\left\|T\sigma^{\infty}\right\|_{Y}^{2}\le\left\|T\sigma\right\|_{Y}^{2}\Rightarrow\sigma^{\infty}=\sigma,\lim_{\rho\to\infty}\left\|A\sigma^{\rho}-f\right\|_{z}^{2}=\left\|A\sigma^{\infty}-f\right\|_{z}^{2}=0\Rightarrow A\sigma^{\infty}-f=0,$$

В (3.17) используя непрерыность и вытекающую отсюда слабую непрерывность операторов мы найдём этот предел: $\sigma^{\rho}\to\sigma,\rho\to\infty$. Теперь усилим этот результат.

Теорема 12. Сглаживающий (регулияризованное решение) сходится к Т-нормальному решению со скоростью $1/\rho$ [8,9]:

$$\sigma^{\rho}-\sigma=0(1/\rho).$$

Доказательство. Согласно критерию сглаживающих сплайнов имеем:

$$T^{T}T\sigma^{\rho}+\rho A^{T}A\sigma^{\rho}=\rho A^{T}z=\rho A^{T}A\sigma\Rightarrow$$

$$T^{T}T\sigma^{\rho}=\rho A^{T}A\sigma-\rho A^{T}A\sigma^{\rho}=\rho A^{T}A(\sigma-\sigma^{\rho})$$

$$\sigma-\sigma^{\rho}=\frac{1}{\rho}(A^{T}A)_{|S}^{-1}T^{T}T\sigma^{\rho}$$

Здесь $(A^{T}A)_{|S}^{-1}$- обратный оператор к $A^{T}A$, который рассматривается на подпространстве сплайнов, где этот оператор непрерывно обратим.

3.3. Случай приближённо заданных входных данных $A_{h}x=z_{\delta}$.

Рассматривать случай, когда исходные данные содержать погрешности:

$$A_{h}x=f_{\delta},\left\|A-A_{h}\right\|\le h\ge0,\left\|f-f_{\delta}\right\|\le\delta\ge0.$$

В этом случае рассматривается задачи:

$$\sigma=\arg\min_{x\in I_{f\delta}}\left\|Tx\right\|_{Y}^{2},I_{h\delta}(f_{\delta})=\{x:\left\|A_{h}x-f_{\delta}\right\|_{Z}\le\delta\}, \qquad (3.19)$$

$$\sigma_{h\delta}^{\alpha} = \arg\min_{x\in X} M_{\alpha}[x, f_{\delta}] = \alpha\|Tu\|_Y^2 + \|A_h u - f_{\delta}\|_Z^2, \rho = \alpha^{-1}. \qquad (3.20)$$

При выполнении условий существования и единственности определены линейные непрерывные операторы такие, что $\sigma = P(f_{\delta}, A_h), \sigma_{h\delta}^{\alpha} = P_{h\delta}^{\alpha}(f_{\delta}, A_h)$.

В этом случае, когда оператор и правая часть заданы приближённо мы будем предполагать, что эти погрешности и параметр сглаживания выбраны согласованы так:

$$\alpha = \alpha(h,\delta) = \frac{h+\delta}{\sqrt{\alpha}} \to 0, h, \delta \to 0. \qquad (3.21)$$

Теорема 13. При выполнении существования и единственности элементов $\sigma, \sigma_{h\delta}^{\alpha}$ справедлива сходимость сглаженных решений к T-нормальному решению:

$$\lim_{h,\delta\to 0}\|\sigma - \sigma_{h\delta}^{\alpha}\| = 0, \alpha = \alpha(h,\delta) = (h+\delta)/\sqrt{\alpha} \to 0. \qquad (3.22)$$

Доказательство. По определению имеем:

$$\alpha\|T\sigma_{h\delta}^{\alpha}\|_Y^2 + \|A_h\sigma_{h\delta}^{\alpha} - f_{\delta}\|_Z^2 \le \alpha\|T\sigma\|_Y^2 + \|A_h\sigma - f_{\delta}\|_Z^2. \qquad (3.23)$$

Имеем

$$A_h\sigma - f_{\delta} = (A_h\sigma - A\sigma) + (A\sigma - f) + (f - f_{\delta}) = (A_h - A)\sigma + (f - f_{\delta}), \qquad (3.24)$$

$$\|A_h\sigma - f_{\delta}\|_Z^2 = 2\{\|A_h - A\|^2\|\sigma\|^2 + \|f - f_{\delta}\|_Z^2\}, \gamma_{h\delta}^{\alpha}(\sigma) = \frac{2}{\alpha}\{\|A_h - A\|^2\|\sigma\|^2 + \|f - f_{\delta}\|_Z^2\}. \qquad (3.25)$$

Тогда согласно выбору параметра сглаживания имеем

$$\alpha\|T\sigma_{h\delta}^{\alpha}\|_Y^2 + \|A_{\delta}\sigma_{h\delta}^{\alpha} - f_h\|_Z^2 \le \alpha\{\|T\sigma\|_Y^2 + \gamma_{h\delta}^{\alpha}(\sigma)\}, \gamma_{h\delta}^{\alpha}(\sigma_{h\delta}^{\alpha}) \to 0, \alpha = \alpha(h,\delta) \to 0, \qquad (3.26)$$

откуда получаем неравенства:

$$\begin{aligned} &\|T\sigma_{h\delta}^{\alpha}\|_Y^2 \le \|T\sigma\|_Y^2 + \gamma_{h\delta}^{\alpha}(u), \\ &\|A_h\sigma_{h\delta}^{\alpha} - f_{\delta}\|_Z^2 \le \alpha\{\|T\sigma\|_Y^2\|\sigma\|_X^2 + \gamma_{h\delta}^{\alpha}(\sigma)\} = C = C(\alpha,\sigma) \end{aligned} \qquad (3.27)$$

Отсюда получаем:

$$\|A_h\sigma_{h\delta}^{\alpha}\|_Z \le \|A_h\sigma_{h\delta}^{\alpha} - f_{\delta}\|_Z + \|f_{\delta}\|_Z = \sqrt{C} + \|f_{\delta}\|_Z \qquad (3.28)$$

Из эквивалентности норм и последних неравенств вытекает ограниченность последовательности $\{\sigma_{h\delta}^{\alpha}\}$. Ограниченное множество в гильбертовом (рефлексивном) пространстве слабо компактно[2, теорема 4.2.с.34; теорема 4,3, с.37], [10, с. 60]. Из неё выделим подпоследовательнось, сходящуюся к некоторому пределу $\{\sigma_{h\delta}^{\alpha 1}\}, \alpha 1 \to 0$.

$$\|T\sigma_{h\delta}^{\alpha 1}\|_Y^2 \le \|T\sigma\|_Y^2 + \gamma_{\alpha 1}(u), \qquad (3.29)$$

$$\|A_h\sigma_{h\delta}^{\alpha 1}\|_Z^2 \le \{\|A_h\sigma_{h\delta}^{\alpha 1} - f_{\delta}\|_Z + \|f_{\delta}\|_Z\}^2. \qquad (3.30)$$

Операторы T, A, A_{δ}-непрерывны, следовательно, слабо непрерывны. Устремляя $\alpha 1 \to 0$ в последних неравенств имеем:

$$\|T\sigma_{h\delta}^{\alpha 1}\|_Y^2 \le \|T\sigma\|_Y^2 + \gamma_{\alpha 1}(u) \to \|T\sigma_{h\delta}^{0}\|_Y^2 \le \|T\sigma\|_Y^2, \qquad (3.31)$$

$$\|A\sigma^0 - f\|_Z^2 \le 0. \qquad (3.32)$$

Отсюда следует, что $\sigma^0 = \sigma$. В силу единственности предельного элемента в (3.29), (3.30) вместе $\alpha 1$ можно писать α. Из (3.29), (3.30) получаем:

$$\left|\sigma_{h\delta}^{\alpha} - \sigma\right|_X^2 = \left\|T(\sigma_{h\delta}^{\alpha} - \sigma)\right\|_Y^2 + \left\|A(\sigma_{h\delta}^{\alpha} - \sigma)\right\|_Z^2 \to 0, h, \delta, \alpha(h,\delta) \to 0.$$

3.4. **Регуляризация интегрального уравнения 1 рода**

Рассмотрим теперь интегральное уравнение первого рода:

$$Lu \equiv \int_a^b K(x,y)u(y)dy = f(x), c \le x \le d. \tag{3.33}$$

Например,

$$Lu \equiv \int_0^1 \{\frac{1}{2}(x+y) + xy\}u(y)dy = \frac{7}{12} + x, \tag{3.34}$$

имеющее точное решение: u(x)=1.

В данном случае имеем:

$$M_\alpha[x,z] = \alpha\|Tu\|_Y^2 + \|Au - f\|_Z^2 =$$

$$\int_c^d [\int_a^b K(x,s)z(s)ds - f(x)]^2 dx + \alpha\int_a^b [z^2(s) + z'^2(s)]ds \tag{3.35}$$

Минимизируем по z и используя утверждение о том, что в точке минимума первая вариация функционала обращается в нуль, получаем уравнение и краевые условия [5, c.122], [4, c.153-154]:

$$A^T Az - A^T f + \alpha z - \alpha z'' = 0, A^T f = \int_c^d K(x,s)f(x)dx, \tag{3.36}$$

$$1) z'(a) = z'(b) = 0, 2) z(a) = z_1, z(b) = z_2 \tag{3.37}$$

Для удобства перепишем это уравнение в виде:

$$\int_a^b B(s,t)z(t)dt + \alpha z(s) - \alpha z''(s) = \int_c^d K(x,s)f(x)dx, B(s,t) = \int_c^d K(x,s)K(x,t)dx, \tag{3.38}$$

Запишем разностную схему для этого уравнения вводя квадратурную формулы трапеций (можно использовать квадратурную формулу Симпсона, как в предыдущих параграфах) вводя узлы и коэффициенты по формулам:

$$s_k = a + (k-1)h, k = 1..n; p_1 = p_n = h/2, k = 2..n-1: p_k = h.$$

В общем случае заменяя вторую производную второй разностной производной имеем:

$$\sum_{j=1}^n B(s_i,t_j)p_j z_j + \alpha z_i + \frac{2z_i - z_{i+1} - z_{i-1}}{h^2} = f_i, i = 1..n. \tag{3.39}$$

Здесь $z_j = z(s_j), f_i = \int_c^d K(x,s_i)f(x)dx$. Значения $B(s_i,t_j), f_i$, не вычисляются аналитически, а получаются с помощью квадратурных формул. Вводя обозначения $B_{i,j} = B(s_i,t_j)p_j$ предыдущую систему линейных уравнений записываем в вектор но-матричном виде [4, c.153-154], [5, c.122] :

$$B_\alpha z = (B + \alpha C)z = f\,, \qquad (3.40)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1+1/h^2 & -1/h^2 & 0 & . & 0 & 0 \\ -1/h^2 & 1+2/h^2 & -1/h^2 & . & 0 & 0 \\ 0 & -1/h^2 & 1+2/h^2 & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & -1/h^2 & 1+2/h^2 & -1/h^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1/h^2 & 1+1/h^2 \end{bmatrix}$$

В случае функционала без производной $z'(s)$ имеем:

$$(B + \alpha E)z = f\,, Ez = z \qquad (3.41)$$

или

$$A^T Az - A^T f + \alpha z = 0, A^T f = \int_c^d K(x,s) f(x)dx, \qquad (3.42)$$

$$\sum_{j=1}^{n} B(s_i, t_j) p_j z_j + \alpha z_i = f_i, i = 1..n. \qquad (3.43)$$

В случае функционала без производной $z'(s)$ имеем:

$$(B + \alpha E)z = f\,, Ez = z \qquad (3.44)$$

$$A^T Az - A^T f + \alpha z = 0, A^T f = \int_c^d K(x,s) f(x)dx, \qquad (3.45)$$

$$\sum_{j=1}^{n} B(s_i, t_j) p_j z_j + \alpha z_i = f_i, i = 1..n. \qquad (3.46)$$

Приведём результаты эксперимента на основе этих формул:

Fredgolm 1 tur formula trapesiy Tixonov Arsenin, c.154

$ORIGIN := 1 \quad n := 10 \quad a := 0 \quad b := 1 \quad h := \frac{(b-a)}{n-1} \quad k := 1..n \quad x_k := a + (k-1)\cdot h$

$K(s,t) := 0.5\cdot(s+t) + s\cdot t \quad f(s) := s + \frac{7}{12} \quad ut(s) := 1 \quad E := identity(n)$

$p_1 := \frac{h}{2} \quad p_n := \frac{h}{2} \quad k := 2..n-1 \quad p_k := h \quad j := 1..n \quad t_j := x_j \quad i := 1..n \quad s_i := x_i$

$B_{i,j} := \sum_{k=1}^{n} K(x_k, s_i)\cdot K(x_k, t_j)\cdot p_k \quad g_i := \sum_{k=1}^{n} p_k \cdot K(x_k, s_i)\cdot f(x_k) \quad \alpha := 0.01$

$v(\alpha) := (B + \alpha\cdot E)^{-1}\cdot g$

Проведём эксперименты на основе формулы: $v(\alpha) = (B + \alpha E)^{-1} g$ при различных значениях α уменьшая её значения:

$v(0.01)^T =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	-0.263	-0.192	-0.122	-0.051	0.02	0.09	0.161	0.232	0.302	0.373

$v(0.001)^T =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	-0.599	-0.469	-0.339	-0.209	-0.08	0.05	0.18	0.31	0.439	0.569

$v(0.0001)^T =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	-0.678	-0.534	-0.39	-0.247	-0.103	0.041	0.184	0.328	0.472	0.615

$v(0.00001)^T =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	-0.687	-0.542	-0.396	-0.251	-0.106	0.04	0.185	0.33	0.475	0.621

$v(0.0000001)^T =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	-0.688	-0.542	-0.397	-0.252	-0.106	0.039	0.185	0.33	0.476	0.621

$v(0.000000001)^T =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	-0.688	-0.542	-0.397	-0.252	-0.106	0.039	0.185	0.33	0.476	0.621

Видна сходимость регулиризованных решений к нормальному решению, так как произошла стабилизация значений нормального решения.

Теперь возьмём стабилизатор второго порядка гладкости и проведём эксперименты:

Fredgolm 1 tur formula trapesiy Tixonov Arsenin. stabilizator 2 -poryadka, c.154

$ORIGIN := 1 \quad n := 10 \quad a := 0 \quad b := 1 \quad h := \frac{(b-a)}{n-1} \quad k := 1..n \quad x_k := a + (k-1)\cdot h$

$K(s,t) := 0.5\cdot(s+t) + s\cdot t \quad f(s) := s + \frac{7}{12} \quad ut(s) := 1 \quad E := identity(n)$

$p_1 := \frac{h}{2} \quad p_n := \frac{h}{2} \quad k := 2..n-1 \quad p_k := h \quad j := 1..n \quad t_j := x_j \quad i := 1..n \quad s_i := x_i$

$B_{i,j} := \sum_{k=1}^{n} K(x_k, s_i)\cdot K(x_k, t_j)\cdot p_k \quad g_i := \sum_{k=1}^{n} p_k\cdot K(x_k, s_i)\cdot f(x_k) \quad \alpha := 0.01$

$C_{1,1} := \alpha\cdot\left(1 + \frac{1}{h^2}\right) \quad C_{1,2} := \frac{-\alpha}{h^2} \quad C_{n,n-1} := \frac{-\alpha}{h^2} \quad C_{n,n} := \alpha\cdot\left(1 + \frac{1}{h^2}\right)$

$i := 2..n-1 \quad C_{i,i-1} := \frac{-\alpha}{h^2} \quad C_{i,i} := \alpha\cdot\left(1 + \frac{2}{h^2}\right) \quad C_{i,i+1} := \frac{-\alpha}{h^2}$

$$v(\alpha) := (B + \alpha \cdot C)^{-1} \cdot g$$

$v(0.1)^T =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	-0.233	-0.201	-0.145	-0.072	0.012	0.099	0.182	0.256	0.312	0.344

$v(0.001)^T =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	-0.62	-0.555	-0.44	-0.291	-0.12	0.057	0.228	0.377	0.492	0.557

$v(0.0001)^T =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	-0.627	-0.562	-0.446	-0.295	-0.123	0.056	0.229	0.38	0.495	0.561

Этот стабилизатор второго порядка гладкости работает лучше.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ.

В статье рассматриваются три основные вариационные методы теории некорректных задач. Приведена краткая теоретическая справка о взаимосвязях этих методов. Это взаимосвязь осуществляется через которые к вариационный метод академика А.Н. Тихонова, который определяет регулияризованное приближённое решение некорректной задачи. Вариационный метод А.Н. Тихонова определяет уравнение минимального элемента, которое является уравнением Эйлера. Когда некорректная задача есть система линейных уравнений уравнение Эйлера есть новая корректная система линейных уравнений, решение которой сходится к решению исходной линейной системы. Когда некорректная задача интегральным уравнением первого рода, тогда уравнение Эйлера является интегро-дифференциальным уравнением. При практическом решении интегро- дифференциальное уравнение дискредитируется и получается уже корректно поставленная система линейных уравнений с параметром регуляризации (сглаживания). При стремлении параметра сглаживания к пределу сглаженные решения сходятся к нормальному решению. Нормальное решение — это решение с минимальным значением стабилизатора-некоторой полунормы, когда некорректная задача имеет много решений. Рассмотрены два примера: 1) система линейных уравнений; 2) интегральное уравнение 1 рода Фредгольма. Составлены для решения этих задач укрупнённые алгоритмы, которые могут быть исполнены в математической система Mathcad.

5. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

С помощью укрупнённых алгоритмов в математической системе Mathcad проведены численные эксперименты, двух задач, где показано стабилизация приближённых решений к нормальному решению. Если некорректная задача имеет единственное решение, то последовательность сглаженных приближённых решений сходится к этому единственному решению. Если же, некорректная задача имеет неединственное решение, то последовательность сглаженных решений сходится к T-нормальному решению. T-нормальное решение есть вариационной задачи

$$\sigma = \arg\min_{x \in I_z} \|Tx\|_Y, I_z = \{x \in X : Ax = z\}.$$

Сглаженное-регулярное приближённое решение есть решение задачи:

$$\sigma^{\rho} = \arg\min_{x \in X} \{\|Tx\|_Y^2 + \rho \|Ax - z\|_Z^2\}.$$

Укрупнённый алгоритм приближённого решения по форме очень близок к математическому алгоритму решения задачи.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Васин В.А. Некорректные задачи в В-пространствах и их приближённое решение вариационными методами. Автореферат диссертации на соискание учёной степени к. ф.-м. н. Свердловск, 1970. -16 с.

2. Сеа Ж. Оптимизация. Теория и алгоритмы. М.: Мир, 1973. -244 с.

3.Иванов В.К., В.В. Васин В.К., Танана В.П. Теория линейных некорректных задач и её приложения. М.: Наука,1974. -206.

4. Гончарский А.В., Черепащук А.М., Ягола А.Г. Численные методы решения задач астрофизики. М.: Наука, 1978. -336 с.

5.Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. -286.

6. Танана В.П. Методы решения операторных уравнений. М.: Наука, 1981. -158 с.

7. Морозов В.А. Методы регуляризации неустойчивых задач. М.: МГУ, 1987. -216.

8. Имомов А.О сглаживающих сплайнах. Вычислительные системы, 75. 1978. -3-15 с.

9. Имомов А. Сплайны в выпуклых множествах. Препринт №65. ВЦ СОАН СССР, Новосибирск, 1979. -1-16 с.

10.Вайнберг М.М. Функциональный анализ. М.: Просвещение, 1979. -128 с.

11. Samatov, B. T., Inomiddinov, S. N., & Umaralieva, N. T. (2020). DIFFERENTIAL GAMES OF THE SECOND ORDER WITH INTEGRAL CONSTRAINTS. Scientific and Technical Journal of Namangan Institute of Engineering and Technology, 2(3), 8-14.

12.Тохирджон о'Гли, А. У., Низомиддинович, И. С., & Тоджиддин о'Гли, Н. С. (2022). ИНТЕГРАЛЬНЫЙ ТЕНГЛАМАЛАРНИ MATHCAD ДАСТУРИДА ТАКРИБИЙ ЙЕЧИШ УСУЛЛАРИ. ИННОВАЦИИ В СОВРЕМЕННОЙ СИСТЕМЕ ОБРАЗОВАНИЯ, 2(18), 880-883..