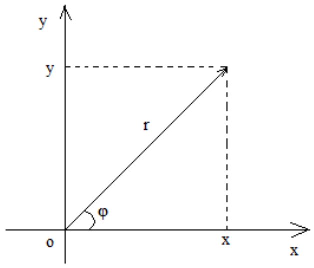
KOMPLEKS O'ZGARUVCHILI FUNKSIYALAR

Rahmonov Erkin Sodiq o'g'li
Toshkent-kimyo texnologiy instituti Shahrisabz filiali

Tekislikda, OXY dekart koordinatalar sistemasida z=x+iy kompleks sonni tasvirlaymiz:



z=x+iy – algebraik ko'rinishi
z=r(cosφ+isinφ) – trigonometrik ko'rinishi
z=$re^{i\varphi}$ – ko'rsatkichli ko'rinishi

Kompleks sonlar tekisligi C da biror E to'plam berilgan bo'lsin: E$\subset C$

<u>Ta'rif-1</u> Agar E to'plamdagi har bir z kompleks songa f qoidaga ko'ra bitta *w* kompleks son mos qo'yilgan bo'lsa, E to'plamda funksiya berilgan deyiladi. Va *w=f(z)* kabi belgilanadi.

E to'plam – aniqlanish sohasi.

z – funksiya argumenti.

w= z ning funksiyasi

z=x+iy ni hisobga olib, bu funksiyani *w=f(z)=f(x+iy)=u+iv* $(x \in R, y \in R,)$ ko'rinishda yozish mumkin.

<u>Ta'rif-2</u> *w=f(z)* $E \subset C$ da berilgan, $z_0 \in E$ bo'lsin. Agar $\forall \varepsilon > 0$ son uchun $\exists \delta = \delta(z_0, \varepsilon) > 0$ son topilsaki, argument z ning $0 < |z - z_0| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $z \in E$ qiymatlarida $|f(z) - A| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, u holda A kompleks son $f(z)$ funksiyaning $z \to z_0$ dagi limiti deb ataladi va

$\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A$ kabi belgilanadi.

<u>Ta'rif-3</u> Agar $\forall \varepsilon > 0$ son uchun $\exists \delta = \delta(z_0, \varepsilon) > 0$ son topilsaki, argument z ning $|z - z_0| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $z \in E$ qiymatlarida

$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, u holda $f(z)$ funksiya z_0 <u>nuqtada uzluksiz</u> deyiladi.

Demak, $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$ bo'ladi.

Agar $z - z_0 = \Delta z, f(z) - f(z_0) = \Delta f$ ni hisobga olsak:

$\lim\limits_{\Delta z \to 0} \Delta f = 0$ bo'lsa, $f(z)$ funksiya z_0 nuqtada uzluksiz deyiladi.

<u>Ta'rif-4</u> Agar $f(z)$ funksiya E to'plamning har bir nuqtasida uzluksiz bo'lsa, u holda $f(z)$ funksiya E <u>to'plamda uzluksiz</u> deyiladi.

$w = f(z)$ funksiya biror $E \subset C$ to'plamda berilgan va $z_0 \epsilon E$ bo'lsin. Unga Δz orttirma beramiz: $z_0 + \Delta z$, natijada $f(z)$ funksiya ham orttirmaga ega bo'ladi: $\Delta w = \Delta f(z_0) = f(z_o + \Delta z) - f(z_0)$.

Ta'rif-5 Agar $\Delta z \to 0$ da $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ nisbatning limiti $\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$ mavjud va chekli bo'lsa, bu limit $f(z)$ funksiyaning z_0 nuqtadagi hosilasi deyiladi va $f'(z_0)$ kabi belgilanadi:

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0+\Delta z)}{\Delta z}$$

Agar $w = f(z) = f(x+iy) = u+iv$ ekanini hisobga olsak, f(z) ning z_0 nuqtadagi differensiyali:

df=du+2dv kabi ifodalanadi.

Teorema (Koshi-Riman shartlari)

f(z)=u(x,y)+iv(x,y) funksiyaning z_0 nuqtada hosilaga $f'(z_0)$ ega bo'lishi uchun bu funksiyaning $z_0(x_0 y_0)$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lib,

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$ shartlarning bajarilishi zarur va yetarli.

Misol-1 $f(z) = z \cdot Imz$ funksiyani differensiallanuvchiga tekshiring.

z=x+iy, *Rez=x*, *Imz=y* edi.

$$f(z) = f(x+iy) = (x+iy)\cdot y = xy + iy^2 \Rightarrow u(x,y) = xy, v(x,y) = y^2$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \text{ shartlarni tekshiramiz: } \begin{matrix} \frac{\partial u}{\partial x} = y; \frac{\partial v}{\partial y} = 2y \\ \frac{\partial u}{\partial y} = x; \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} y = 2y \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Demak berilgan funksiya faqat (0;0) nuqtada differensiallanuvchi.

Z=f(x,y) funksiya $M_0(x_0,y_0)$ nuqtada va uning biror atrofida 3-tartibgacha xususiy hosilalarga ega hamda $M_0(x_0,y_0)$ nuqta Z=f(x,y) funksiyaning kritik nuqtasi bo'lsin, ya'ni $z'_x(x_0,y_0)=0$ va $z'_y(x_0,y_0) = 0$ bo'lsin. U holda $\Delta(M_0) = z''_{xx}(M_0) * z''_{yy}(M_0) - \left[z''_{xy}(M_0)\right]^2 > 0$ shartda

$M_0(x_0,y_0)$ nuqta $\Delta(M_0) < 0$ da maksimum, $\Delta(M_0) > 0$ da minimum nuqtasi bo'ladi.

Misol-2 $z = x^2 - 2xy + 3y^2 + x - 2y + 5$ funksiyani ekstremumga tekshiring.

Dastlab, berilgan funksiyaning kritik nuqtalarini topamiz:

$z'_x = 2x - 2y + 1$ $\qquad$ $z'_y = 6y - 2x - 2$

$$\begin{cases} 2x - 2y + 1 = 0 \\ -2x + 6y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow X = -\frac{1}{4}; \quad y = \frac{1}{4}; \quad \text{Kritik nuqta } \left(-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right)$$

Endi 2-tartibli hosilalarni topamiz: $z''_{xx} = 2$; $z''_{yy} = 6$; $z''_{xy} = -2$

$\Delta(M_0)$ ifodani tuzamiz:

$$\Delta(M_0) = z''_{xx}(M_0) * z''_{yy}(M_0) - \left[z''_{xy}(M_0)\right]^2 = 2 * 6 - (-2)2 = 12 - 4 = 8 > 0,$$ *demak*

Z=f(x,y) funksiya $\left(-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right)$ nuqtada minimumga erishadi.

Shartli ekstremum_ Z=f(x,y) funksiyaning x va y ga nisbatan biror shart asosida ekstremumini topish – shartli ekstremum deyiladi. Quyidagi misol yordamida ko'rib chiqamiz.

<u>Misol-3</u> $z=x^2+y^2$ funksiyaning $x-y+2=0$ shart asosida ekstremumini toping.

$x-y+2=0 \quad \Rightarrow \quad y=x+2 \quad \Rightarrow \quad z=x^2+(x+2)^2$

$z'=2x+2(x+2)=4x+4=0 \quad \Rightarrow$ *x=-1 -kritik nuqta*

$z''=4>0 \quad \Rightarrow$ *x=-1 da minimumgz erishadi.*

y ni topamiz: $y=x+2 \quad \Rightarrow$ *x=-1 da y=1*

Shartli ekstremumni topamiz: $z=x^2+y^2 \quad \Rightarrow \quad z=(-1)^2+1^2=2$

Demak, javob: $z_{\min}=z(-1;1)=2$

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR:

1. Oliy matematika. (Yo.Soatov) 1996-y. Toshkent.
2. Курс математического анализа. (Л. Кудрявцев) 1998-г. Москва.
3. Oliy matematikadan misol va masalalar. (Sh.Xurramov) 2015-y. Toshkent.
4. www.mathprofi.ru internet sayti.
5. https://scholar.google.ru/scholar?oi=bibs&cluster=3658719210033948033&btnI=1&hl=ru