МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В КУРСЕ АЛГЕБРЫ АКАДЕМИЧЕСКИХ ЛИЦЕЯХ

Хабибуллина М.М
преподаватель математики академического лицея Ташкентского Туринского Политехнического университета,
Ахмедова Ф.А
преподаватель математики академического лицея Ташкентского Международного Вестминстерского университета, Узбекистан, г.Ташкент

Аннотация: *В статье рассказывается о программе раздела «Тригонометрия» в курсе математики академических лицеях и о применении тригонометрии в жизни. Во введении дается определение тригонометрических уравнений и упоминаются виды решений уравнения. На примерах показаны методы решения тригонометрических уравнений.*

Ключевые слова: *Тригонометрия, тригонометрическая функция, разложение на множители, метод оценки, замена переменной*

В процессе обучения раздела Тригонометрии учащиеся академических лицеев сталкиваются с проблемами решения тригонометрических уравнений разного уровня сложности. Задача преподавателей сформировать систему знаний и умений решать тригонометрические уравнения различными методами (Применение метода разложения на множители при решении тригонометрических уравнений; Применение метода оценки при решении тригонометрических уравнений; Прием до умножения левой и правой частей уравнения на тригонометрическую функцию при решении тригонометрических уравнений. В данной статье рассмотрим некоторые методы решения уравнений разной сложности.

Теорема - основа метода разложения на множители

Уравнение $f(x)g(x) = 0$ равносильно на своей области определения совокупности $\left[\begin{array}{l} f(x) = 0 \\ g(x) = 0 \end{array}\right.$.

Теорема - основа метода замены переменной

Уравнение $f(g(x)) = a$ равносильно на ОДЗ совокупности уравнений

$$\left[\begin{array}{l} g(x) = t_1 \\ g(x) = t_2 \\ \quad \dots \\ g(x) = t_n \end{array}\right., \text{где } t_i - \text{ корень уравнения } f(t) = a$$

.

На уроке мы продолжаем заниматься решением тригонометрических уравнений. И здесь мы рассмотрим такие методы как разложение на множители, метод оценки, а также продолжим решать тригонометрические уравнения методом замены переменной. Кроме того, мы узнаем, как использовать умножением правой и левой частей уравнений для получения более простого уравнения, как использовать тригонометрические формулы для решения уравнений.

1. Рассмотрим метод разложения на множители

Теоретической основой метода разложения на множители является теорема:

Теорема

Уравнение $f(x)g(x)=0$ равносильно на своей области определения совокупности $\left[\begin{array}{l} f(x)=0 \\ g(x)=0 \end{array}\right.$.

Для того чтобы применить эту теоремы, нужно исходное уравнение привести к виду $f(x)g(x)=0$, используя разные приемы.

Пример 1. Решить уравнение: $2sinxcosx = sinx - cosx + \frac{1}{2}$

Решение:

Перенесем правую часть уравнения в левую и преобразуем:

$$(2sinxcosx - sinx) + cosx - \frac{1}{2} = 2sinx\left(cosx - \frac{1}{2}\right) + cosx - \frac{1}{2} = \left(cosx - \frac{1}{2}\right)(2sinx + 1)$$

$$\left(cosx - \frac{1}{2}\right)(2sinx + 1) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} cosx - \frac{1}{2} = 0 \\ 2sinx + 1 = 0 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} cosx = \frac{1}{2} \\ sinx = -\frac{1}{2} \end{array}\right., \left[\begin{array}{l} x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k \\ x = (-1)^{n+1}\cdot\frac{\pi}{6} + \pi n \end{array}\right., k, n \in Z.$$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k \\ x = (-1)^{n+1}\cdot\frac{\pi}{6} + \pi n \end{array}\right., k, n \in Z$.

В этом случае мы использовали метод группировки для разложения на множители тригонометрического выражения.

Часто для преобразования выражения в произведение нужно использовать тригонометрические формулы. Рассмотрим такой пример:

Пример 2.

Решить уравнение: $2sin6x + sin9x - sin3x = 0$

Решение:

Преобразуем разность синусов в произведение:

$2sin6x + 2sin6xcos3x = 0$

Теперь вынесем за скобку общий множитель:

$2sin6x(1 + cos3x) = 0$

И решим каждое из двух уравнений: $\left[\begin{array}{l} sin6x = 0 \\ cos3x = -1 \end{array}\right.$.

$$\left[\begin{array}{l} 6x = \pi k \\ 3x = \pi + 2\pi n \end{array}\right., k, n \in Z$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi k}{6} \\ x = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{2\pi n}{3} \end{array}\right., k, n \in Z$$

. Заметим, что вторая серия решений включается в первую. Поэтому мы можем оставить в ответе только первую серию.

Ответ: $x = \frac{\pi k}{6}, k \in Z$.

2. Замена переменной

Еще один метод решения тригонометрических уравнений - это метод разложения на множители. Мы уже знакомились с ним, когда решали уравнения, сводимые к квадратному или другому алгебраическому уравнению, когда решали однородные уравнения, а также знакомились с универсальной тригонометрической подстановкой. На этом уроке мы познакомимся еще с одной заменой, которая позволяет решать тригонометрические уравнения.

Рассмотрим уравнение вида:

$a(sinx \pm cosx) + bsinxcosx + c = 0, ab \neq 0$

или $a(sinx \pm cosx) + dsin2x + c = 0, ad \neq 0$.

Для его решения введем новую переменную $t = sinx \pm cosx$.

Тогда $t^2 = (sinx \pm cosx)^2 = sin^2x \pm 2sinxcosx + cos^2x = 1 \pm 2sinxcosx = 1 \pm sin2x$

.

Выразим отсюда $sinxcosx = \pm\frac{1}{2}(t^2 - 1)$ (или $sin2x = \pm(t^2 - 1)$).

Пример3.

Решите уравнение $\sin x - \cos x = 4sin2x$

Решение:

Сделаем замену $\sin x - \cos x = t$. Тогда $sin2x = 1 - t^2$.

Вспомогательное уравнение имеет вид:

$4t^2 + t - 4 = 0$.

$$\left[\begin{array}{l} t = \dfrac{-1 + \sqrt{65}}{8} \\ t = \dfrac{-1 - \sqrt{65}}{8} \end{array}\right..$$

Вернемся к исходной переменной:

$$\left[\begin{array}{l} sinx - cosx = \dfrac{-1 + \sqrt{65}}{8} \\ sinx - cosx = \dfrac{-1 - \sqrt{65}}{8} \end{array}\right..$$

Решим каждое из этих уравнений с помощью формулы введения вспомогательного угла:

$$\left[\begin{array}{l}\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})=\frac{-1+\sqrt{65}}{8}\\ \sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})=\frac{-1-\sqrt{65}}{8}\end{array}\right.,\quad \left[\begin{array}{l}\sin(x-\frac{\pi}{4})=\frac{-1+\sqrt{65}}{8\sqrt{2}}\\ \sin(x-\frac{\pi}{4})=\frac{-1-\sqrt{65}}{8\sqrt{2}}\end{array}\right..$$

Так как $\left|\frac{-1\pm\sqrt{65}}{8\sqrt{2}}\right|<1$, то оба уравнения имеют решения:

$$\left[\begin{array}{l}x-\frac{\pi}{4}=(-1)^n arcsin\left(\frac{-1+\sqrt{65}}{8\sqrt{2}}\right)+\pi k\\ x-\frac{\pi}{4}=(-1)^n arcsin\left(\frac{-1-\sqrt{65}}{8\sqrt{2}}\right)+\pi k\end{array}\right., k\in Z$$

$$\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4}+(-1)^n arcsin\left(\frac{-1+\sqrt{65}}{8\sqrt{2}}\right)+\pi k\\ x=\frac{\pi}{4}+(-1)^n arcsin\left(\frac{-1-\sqrt{65}}{8\sqrt{2}}\right)+\pi k\end{array}\right., k\in Z,$$

Ответ: $\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4}+(-1)^n arcsin\left(\frac{-1+\sqrt{65}}{8\sqrt{2}}\right)+\pi k\\ x=\frac{\pi}{4}+(-1)^n arcsin\left(\frac{-1-\sqrt{65}}{8\sqrt{2}}\right)+\pi k\end{array}\right., k\in Z.$

3. Теперь рассмотрим метод оценки

Часто этот метод применяют в том случае, когда уравнение включает в себя функции разного типа, например, тригонометрические и показательные, и обычные преобразования на приводят к результату. Но мы рассмотрим метод оценки при решении тригонометрических уравнений. Он основан на свойстве ограниченности тригонометрических выражений.

Рассмотрим пример.

Пример 4.

Решить уравнение: $cos2xcos3x=1$.

Мы знаем, что $|cos\alpha|\leq 1$. С другой стороны, для того чтобы произведение двух различных чисел было равно 1, то они должны быть взаимно обратными, то есть если одно из них меньше 1,то другое больше 1. Но так как косинус больше 1 быть не может, то равенство может выполняться только в двух случаях:

$\begin{cases}cos2x=1\\cos3x=1\end{cases}$ или $\begin{cases}cos2x=-1\\cos3x=-1\end{cases}$.

$\begin{cases}2x=2\pi k\\3x=2\pi n\end{cases}, k,n\in Z$ или $\begin{cases}2x=\pi+2\pi k\\3x=\pi+2\pi n\end{cases}, k,n\in Z$.

$\begin{cases}x=\pi k\\x=\frac{2\pi n}{3}\end{cases}, k,n\in Z$ или $\begin{cases}x=\frac{\pi}{2}+\pi k\\x=\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi n}{3}\end{cases}, k,n\in Z$.

Вторая система ни при каких значениях k и n не имеет решений.

Первая система имеет решения при n=3m, k=2m, поэтому ее решения, а значит, и решение уравнения: $x = 2\pi m, m \in Z$

Ответ: $x = 2\pi m, m \in Z$

Рассмотрим еще один пример, в котором метод оценки применяется для решения уравнения, правая и левая части которого являются функциями разного типа.

Пример 5. Решите уравнение: $3cosx - 4sinx = x^2 + 2x + 7$

Решение:

Рассмотрим левую часть уравнения и преобразуем его:

$3cosx - 4sinx = 5sin\left(x + actg\frac{b}{a}\right)$.

Поэтому $-5 \leq 3cosx - 4sinx \leq 5$

Теперь рассмотрим правую часть: $x^2 + 2x + 7 = (x+1)^2 + 6 \geq 6$.

Поэтому данное уравнение решений не имеет.

Ответ: решений нет

Рассмотрим несколько задач.

Решите уравнение:

$sin^2 3x + sin^2 4x = sin^2 5x + sin^2 6x$

Решение:

Умножим уравнение на 2 и воспользуемся формулой понижения степени:

$2sin^2 3x + 2sin^2 4x = 2sin^2 5x + 2sin^2 6x$

$1 - cos6x + 1 - cos8x = 1 - cos10x + 1 - cos12x$

$cos6x + cos8x = cos10x + cos12x$

Теперь воспользуемся формулой преобразования суммы косинусов с произведение:

$2cos7xcosx = 2cos11xcosx$.

Теперь перенесем правую часть в левую и вынесем за скобку общий множитель:

$2cos7xcosx - 2cos11xcosx = 0$

$2cosx(cos7x - cos11x) = 0$

Теперь используем формулу преобразования разности косинусов в произведение:

$-4cosxsin\,9xsin(-2x) = 0$

$cosxsin\,9xsin2x = 0$ Теперь решим три простейших тригонометрических уравнения:

$$\left[\begin{array}{l} cosx = 0 \\ sin\,9x = 0 \\ sin2x = 0 \end{array}\right., \quad \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ x = \frac{\pi n}{9} \\ x = \frac{\pi m}{2} \end{array}\right., k, n, m \in Z$$.

В этом случае достаточно оставить первые две серии решений, так как числа вида $\frac{\pi m}{2}$ при нечетных значениях m попадают в первую серию решений, а при четных - во вторую.

Таким образом, получаем ответ:

Ответ: $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k \\ x = \dfrac{\pi n}{9} \end{array}\right., k, n \in Z$

ОСНОВНАЯ ЛИТЕРАТУРА:

1. Колягин Ю.М., Ткачёва М.В., Фёдорова Н.Е., Шабунин М.И. под ред. Жижченко А.Б. Алгебра и начала математического анализа. Шахмейстер А.Х. Тригонометрия. М.

2. Karimov, U. U., & Karimova, G. Y. (2021). The importance of innovative technologies in achieving educational effectiveness. Журнал естественных наук, 1(1).

3. Karimova, G., & Makhamadaliev, L. (2022). The importance of innovative ideas in increasing the effectiveness of education. Asian Journal of Research in Social Sciences and Humanities, 12(6), 143-148.

4. Ахмедова, Ф. А. (2023). УСЛОВИЯ ДОСТИЖЕНИЯ ЭФФЕКТИВНОСТИ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ. INNOVATIVE ACHIEVEMENTS IN SCIENCE 2022, 2(19), 29-32.

5. Ахмедова, Ф. А. (2023). ВОЗМОЖНОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ИНТЕРАКТИВНЫХ МУЛЬТИМЕДИЙНЫХ СРЕДСТВ В СИСТЕМЕ ОБРАЗОВАНИЯ. INNOVATIVE ACHIEVEMENTS IN SCIENCE 2022, 2(24), 83-87.

6. Ахмедова, Ф. А. (2023, December). РАЗВИТИЕ КРЕАТИВНОГО МЫШЛЕНИЯ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ В АКАДЕМИЧЕСКИХ ЛИЦЕЯХ. In INTERNATIONAL SCIENTIFIC RESEARCH CONFERENCE (Vol. 2, No. 19, pp. 104-107).