ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ПРИ ДЕЛЕНИИ МНОГОЧЛЕНОВ

Сюткина Светлана Михайловна
Преподаватель математики высшей категории академического лицея Ташкентского государственного экономического университета, город Ташкент, Узбекистан

Аннотация: *В данной статье рассматривается применение метода неопределенных коэффициентов для нахождения частного и остатка от деления многочленов без выполнения действия деления с помощью вычислительной схемы. Представленный в статье метод показан на примерах.*

Ключевые слова: *метод неопределенных коэффициентов, делимое, делитель, частное, остаток.*

Каждому математику известно, как часто приходится прибегать к методу неопределенных коэффициентов, кроме того, многие задачи, решаемые обычно без метода неопределенных коэффициентов, легко и просто решаются с помощью этого метода.

Метод неопределенных коэффициентов можно применять для разложения многочлена на множители, для решения уравнений высших степеней, для деления многочлена на многочлен, для выделения точного квадрата, при интегрировании рациональных функций.

Суть этого метода заключается в следующем. Пусть дан многочлен $P(x)$ степени n и многочлен $D(x)$ степени m $(n \geq m)$. При делении многочлена $P(x)$ на многочлен $D(x)$ получим частное $Q(x)$ и остаток $R(x)$. Многочлен $P(x)$ можно представить в виде

$$P(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x), \qquad (1)$$

где $P(x)$ – делимое, $D(x)$ – делитель, $Q(x)$ – частное, $R(x)$ – остаток.

Степень частного $Q(x)$ равна разности степеней делимого и делителя, т. е. $n - m$, степень остатка $R(x)$ меньше степени делителя, т. е. меньше m.

Перемножая многочлены $D(x)$ и $Q(x)$ и приводя подобные слагаемые, в правой части равенства (1) получим многочлен n-й степени. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x этого многочлена и многочлена $P(x)$, получим систему n уравнений, решая которую, находим коэффициенты частного и остатка. Если все коэффициенты остатка равны нулю, то многочлен $P(x)$ делится нацело на многочлен $D(x)$.

Рассмотрим применение метода неопределенных коэффициентов для нахождения частного и остатка от деления многочленов без выполнения действия деления (частным случаем такого деления является известная схема Горнера).

Известно, что при делении многочленов степень многочлена-частного равна разности степеней делимого и делителя, степень остатка, по крайней мере, на единицу ниже степени делителя.

Для обоснования схемы деления многочлена на многочлен зафиксируем показатели степеней делимого и делителя. Пусть требуется найти частное и остаток от деления многочлена $P(x) = ax^6 + bx^5 + cx^4 + dx^3 + ex^2 + fx + g$ на трёхчлен $D(x) = x^2 - px - q$. В частном должен получиться многочлен $Q(x)$ четвертой степени, а в остатке может быть многочлен $R(x)$ не выше первой степени (линейный двучлен). Запишем эти многочлены с неопределенными коэффициентами:

$Q(x) = hx^4 + kx^3 + lx^2 + mx + n$ (частное), $R(x) = rx + s$ (остаток). Делимое всегда равно сумме произведения делителя на частное и остатка, т. е. $P(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x)$. Отсюда получаем тождество:

$$ax^6 + bx^5 + cx^4 + dx^3 + ex^2 + fx + g =$$
$$= (x^2 - px - q) \cdot (hx^4 + kx^3 + lx^2 + mx + n) + rx + s.$$

Раскрыв скобки справа и приведя подобные слагаемые, приравняем коэффициенты при одинаковых степенях буквы x, получим такую систему уравнений относительно коэффициентов h, k, l, m, n, r и s:

$a = h$; $b = k - ph$; $c = l - pk - qh$; $d = m - pl - qk$; $e = n - pm - ql$; $f = r - pn - qm$; $g = s - qn$.

Из этой системы легко выразить каждый коэффициент через известные величины и ранее определенные коэффициенты:

$h = a$; $k = b + ph$; $l = c + pk + qh$; $m = d + pl + qk$; $n = l + pm + ql$; $r = f + pn + qm$; $s = g + gn$.

Полученный результат удобно представить в виде вычислительной схемы:

Делимое / Делитель	1. a	2. b	3. c	4. d	5. e	6. f	7. g
8. p		11. $8 \cdot 10$	14. $8 \cdot 13$	17. $8 \cdot 16$	20. $8 \cdot 19$	23. $8 \cdot 22$	
9. q			12. $9 \cdot 10$	15. $9 \cdot 13$	18. $9 \cdot 16$	21. $9 \cdot 19$	24. $9 \cdot 22$
Коэффициенты результата	10. 1	13. $2 + 11$	16. $3 + 14 + 12$	19. $4 + 17 + 15$	22. $5 + 20 + 18$	25. $6 + 23 + 21$	26. $7 + 24$
Буквенная часть результата	x^4	x^3	x^2	x		x	
	частное					остаток	

Принцип использования схемы: каждая заполняемая клетка имеет порядковый номер (жирным шрифтом), указывающий рекомендованный порядок заполнения схемы. В клетках № 1 – 7 записываются последовательные коэффициенты делимого; коэффициенты делителя, взятые с противоположными знаками, записываются в клетки № 8 и 9. Во всех остальных клетках схемы ниже порядкового номера символически записано, результат какого действия и над какими числами нужно вписать в данную клетку. Например, запись $9 \cdot 10$ в клетке № 12 означает, что в эту клетку нужно записать произведение числа, записанного в клетке № 9 на число, записанное в клетке № 10. Числа четвертой строки, кроме последних двух, выражают последовательные коэффициенты частного, последние два числа этой строки являются коэффициентами остатка.

П р и м е р 1.

Разделить многочлен $3x^6 - 5x^5 + 2x^4 - 7x^2 + 5x - 9$ на трехчлен $x^2 - 2x + 3$.

Делимое / Делитель	1. 3	2. -5	3. 2	4. 0	5. -7	6. 5	7. -9
8. 2		11. 6	14. 2	17. -10	20. -26	23. -36	
9. -3			12. -9	15. -3	18. 15	21. 39	24. 54
Коэффициенты результата	10. 3	13. 1	16. -5	19. -13	22. -18	25. 8	26. 45
Буквенная часть результата	x^4	x^3	x^2	x		x	
	частное					остаток	

Результат деления:

$$3x^6 - 5x^5 + 2x^4 - 7x^2 + 5x - 9 =$$
$$= (x^2 - 2x + 3)(3x^4 + x^3 - 5x^2 - 13x - 18) + 8x + 45$$

или

$$\frac{3x^6 - 5x^5 + 2x^4 - 7x^2 + 5x - 9}{x^2 - 2x + 3} = 3x^4 + x^3 - 5x^2 - 13x - 18 + \frac{8x + 45}{x^2 - 2x + 3}$$

С помощью приведенной схемы можно выполнить деление многочлена на многочлен любой степени и во всех таких схемах, выполняющих деление многочленов, само действие деления нигде не используется; в этом основное преимущество таких схем.

П р и м е р 2.

Разделить многочлен $x^5 - x^4 - 2x^3 + 2x^2 + x - 1$ на $x^3 - 1$.

Делимое / Делитель	1. 1	2. -1	3. -2	4. 2	5. 1	6. -1
7. 0		11. 0	15. 0	19. 0	23. 0	

8. 0			12. 0	16. 0	20. 0	24. 0
9. 1				13. 1	17. −1	21. −2
Коэффициенты результата	10. 1	14. −1	18. −2	22. 3	25. 0	26. −3
Буквенная часть результата	x^2	x		x^2	x	
	частное			остаток		

Результат деления:

$$x^5 - x^4 - 2x^3 + 2x^2 + x - 1 = (x^3 - 1)(x^2 - x - 2) + 3x^2 - 3$$

или

$$\frac{x^5 - x^4 - 2x^3 + 2x^2 + x - 1}{x^3 - 1} = x^2 - x - 2 + \frac{3x^2 - 3}{x^3 - 1}$$

Применение такого метода деления многочленов вызывает у учащихся интерес.

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА:

1. Сайдаматов Э., Аманов А. и др. «Алгебра и основы математического анализа» учебное пособие для академических лицеев. Ч. I. Т. «O’qituvchi», 2012 г.
2. Задачи по математике. Алгебра. Справочное пособие. Вавилов В. В. и др. – М.: Наука, 1987.